Área 2 - Mapa Logístico

Davi Lazzari, *(232847) - Métodos Computacionais da Física B - UFRGS*

Porto Alegre, 15 de maio de 2015

Este trabalho tem como objetivo mostrar o comportamento caótico de uma função específica.

Introdução

Existem funções com determinadas características que, para valores específicos de parâmetros, acabam tomando comportamentos diferentes e complexos. É o caso das funções caóticas, funções que são difíceis de prever. Para analisar funções desse gênero, são analisados seus parâmetros e alguns graus de comportamento através de técnicas bem definidas, trassando-se assim um mapa logístico funcional.

Uma função deste gênero é a que aqui será analisada, dada por:

$$x_{n+1} = \begin{cases} m.x_n, & \text{se } 0 \leq x_n < 0.5 \\ m(1 - x_n), & \text{se } 0.5 \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Esta é uma equação recursiva, tomando o domínio $[0, 1] \rightarrow 0 \leq x_n \leq 1$ espera-se que sua imagem pertença ao mesmo domínio, uma vez que o ponto x_n é a imagem de um ponto x_{n-1} e o domínio de um ponto x_{n+1}, com o n como um parâmetro de desenvolvimento temporal (computacionalmente, o número da iteração). Para isso, deve-se então definir um m que respeite e limite a função ao intervalo $[0, 1]$.

Definição de *m*

Para achar os pontos de m em que a euqação se encontra limitada no intervalo esperado, testa-se para os pontos máximos e mínimos de ambos os casos.

0.1 $0 \leq x_{n+1} < 0.5$

Para $0 \leq x_{n+1} < 0.5$ analisa-se dois casos, os dois limites do intervalo de validade da primeira equação $x_{n+1} = 0$ e $x_{n+1} = 4.99\cdots$. E subsequentemente, a relação com x_n para os mesmos valores.

$$\begin{gathered} 0 = mx_n \\ m = 0 \text{ para } \forall x_n \in [0, 1] \end{gathered} \tag{2}$$

$$4.99\cdots = mx_n$$

$$\begin{gathered} x_n = 0 \Rightarrow m = \frac{4.99\cdots}{0} \Rightarrow m \rightarrow \infty \\ m \text{ diverge.} \end{gathered} \tag{3}$$

$$x_n = 4.99\cdots \Rightarrow m = \frac{4.99\cdots}{4.99\cdots} \Rightarrow m = 1 \tag{4}$$

Obtém-se dessa forma, para $x_{n+1} < 0.5 \; \exists \; m = 0$ e $m = 1$.

0.2 $0.5 \leq x_{n+1} \leq 1$

Da mesma forma para $0.5 \leq x_{n+1} \leq 1$ analisa-se dois casos, os dois limites do intervalo de validade da segunda equação $x_{n+1} = 0.5$ e $x_{n+1} = 1$. E em seguida, a relação com x_n para os mesmos valores.

$$0.5 = m(1 - x_n)$$

$$x_n = 0.5 \Rightarrow m = \frac{0.5}{(1-0.5)} \Rightarrow m = 1 \quad (5)$$

$$x_n = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{(1-1)} \Rightarrow m \to \infty \quad (6)$$

m diverge.

$$1 = m(1 - x_n)$$

$$x_n = 0.5 \Rightarrow m = \frac{1}{(1-0.5)} \Rightarrow m = 2 \quad (7)$$

$$x_n = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{(1-1)} \Rightarrow m \to \infty \quad (8)$$

m diverge.

A partir das contas feitas, obtém-se então da *Eq. 2* e da *Eq. 7* os valores de máximo e mínimo, respectivamente, para m tais que $m \in [0, 2]$, uma vez que os outros resultados ou estão neste intervalo, ou divergem.

Pontos fixos de 1ª Ordem e Estabilidade

Os pontos fixos de primeira ordem são os pontos em que $f(x_n) = x_n$ ou seja, $x_{n+1} = x_n$ para $n \to \infty$, é o equivalente ao ponto em que a série converge, visto que a distância de dois pontos tende a zero: $|x_{n+1} - x_n| \to 0$. Estes pontos, se estáveis, são chamados de atratores da função, pois, mesmo com pequenas variações nos valores inicias $x_0 = x_0 + \delta$, a função continua a convergir para o mesmo ponto. Existem ainda os pontos fixos de ordem maior $f(f(x)) = x_{n+2} = x_n$, ou, pontos fixos instáveis, valores que orbitam um ponto fixo.

Para se caracterizar a etabilidade dos pontos fixos, analisa-se a forma como eles variam. A variação dos pontos da função é vista como a proporção entre a variação dos pontos da imagem e da função, ou seja, a derivada no ponto:

$$f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \approx \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \quad (9)$$

$$\text{Assim, se } |f'(x_n)| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| < 1 \quad (10)$$

$$\text{e } |f'(x_n)| > 1 \Rightarrow \left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| > 1 \quad (11)$$

Da *Eq. 10*, a diferença entre os pontos x_n e x_{n+1} é maior que dos pontos seguites x_{n+1} e x_{n+2}, isso mostra que a sequência está convergindo para um mesmo ponto e caracteriza-o como um ponto fixo estável, um ponto atrator.

De forma semelhante, pela *Eq. 11*, a distância entre os pontos x_n e x_{n+1} é menor que dos pontos seguites x_{n+1} e x_{n+2}, o que indica uma divergência da função, como sabe-se que a função é limitada, entre $[0, 1]$, e não pode efetivamente divergir, inferi-se que estes pontos assumem um certo comportamento periódico e se repetem para algum tempo esta repetição depende da ordem do ponto fixo.

Executando-se a relação de igualdade para achar os pontos fixos de primeira ordem, tal que $x* = x_{n+1} = x_n$, para $x_n < 0.5$ tem-se que $x* = mx* \Rightarrow m = 1$ o que não diz muita coisa, já para $x_n \geq 0.5$:

$$x* = m(1 - x*) \Rightarrow x* = m - m.x*$$
$$x*(1+m) = m \Rightarrow x* = \frac{m}{(1+m)} \quad (12)$$

Deriva-se as equações para entender-se as relações de estabilidade:

$$0 \leq x_n < 0.5$$

$$f(x_n) = m.x_n \Rightarrow f'(x_n) = m$$
$$\text{como m } \in [0, 2] \Rightarrow |f'(x_n)| = m \quad (13)$$

$$0.5 \leq x_n \leq 1$$

$$f(x_n) = m(1 - x_n) \Rightarrow f'(x_n) = -m$$
$$|f'(x_n)| = |-m| \Rightarrow |f'(x_n)| = m \quad (14)$$

E assim, tem-se que os pontos fixos (de primeira ordem) serão estáveis ou instáveis para $m < 1$ e $m > 1$, respectivamente.

Das equações obtidas (*12*, *13* e *14*), testa-se a estabilidade:

$$|f'(x*)| = m < 1 \Rightarrow \left|\frac{x*}{(1-x*)}\right| < 1$$
$$x* < |(1-x*)|$$
$$\text{para } x* < 1 \Rightarrow x* < 1 - x* \Rightarrow x* < \frac{1}{2} \quad (15)$$
$$\text{para } x* > 1 \Rightarrow x* < x* - 1 \Rightarrow 0 < -1 \quad (16)$$

Como a *Eq. 16* resulta em absurso, temos que todo ponto $x_n < 0.5$ é ponto fixo, para $m < 1$, (*Eq. 15*).

Estabilidade para $m < 1$

Para estes valores de coeficiente tem-se as condições da *Eq.15* satisfeitas, percebe-se assim que os pontos fixos são estáveis. Como $x_n < 0.5$, para algum n, tem-se $x_{n+1} = m.x_n$ como $m < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$, como a função é bem comportada neste regime, pode-se extrapolar $x_n > x_{n+1} > x_{n+2} > \cdots$ e então: $x_n \to 0$ para $n \to \infty$.

Tomando-se igualmente a análise para um dado $x_n \geq 0.5$, tem-se $x_{n+1} = m(1-x_n)$ como $m < 1$ e $(1-x_n) < 0.5 \Rightarrow x_{n+1} = m(1-x_n) < 0.5$, logo, a equação para o x_{n+2} é diferente, tal que $x_{n+2} = m.x_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$ e assim recai-se na *Eq. 15*, onde $x_n > x_{n+1} > x_{n+2} > \cdots \Rightarrow x_n \to 0$, para $n \to \infty$.

Ou seja, se $m < 1$, independete do x_0, para $n \to \infty \Rightarrow x* = x_n \to 0$.

Estabilidade para $m = 1$

Para o coeficiente igual a 1 a situação é um tanto parecida, pois, com $x_n < 0.5 \Rightarrow x_{n+1} = 1.x_n$, ou seja, para qualquer n, $x* = x_{n+1} = x_n = \cdots = x_1 = x_0$, logo, um ponto fixo estável.

Já para um $x_j \geq 0.5$ tem-se $x_{j+1} = 1.(1 - x_j)$ como $(1-x_j) < 0.5 \Rightarrow x_{j+1} < 0.5$ e volta-se para situação recém definida, onde $x* = x_{n+1} = x_n = \cdots = x_{j+2} = 1.x_{j+1} = 1.(1-x_j)$ para qualquer n, o que faz com que o primeiro ponto menor que 0.5 seja o ponto fixo estável.

Estabilidade para $m > 1$

Para o coeficiente maior que 1 a situação começa a ficar mais complexa de se analisar, pois o $m > 1$ "força"o crescimento da função; com valores altos, a equação passa a se orientar também por $(1-x_n)$ o que a "força"para valores menores. Assim, ocorre que para um $x_n \geq 0.5$ o produto x_{n+1} é nivelado por um termo de crescimento e um de decrescimento, tal que a função orienta-se de forma oscilatória, ora comandada por m ora por $(1-x_n)$.

Como ela oscila, não existe um estado estacionário de ponto fixo estável (para primeira ordem), o que existem são pontos fixos instáveis aos quais as funções orbitam. Inicia-se então um comportamento de bifurcações, onde para m fixado, pouco maior que 1, a função passa a assumir dois pontos bem definidos, em torno do ponto fixo, sem nunca alcançá-lo. Conforme aumenta-se o valor de m, aumentam-se o número de bifurcações e os pontos bem definidos da função. Para m muito grande, a periodicidade dos pontos que se repetem é muito grande ao ponto de não parecer que realmente repitam.

Pontos fixos de ordem maior

Conforme aumenta-se o coeficiente m, aumenta-se o número de bifurcações. Tomando um valor de m pouco maior que 1, tem-se que $f(f(x_n)) = x_{n+2} = x_n$ e ao aumentá-lo, aumenta-se gradativamente os períodos de repetição dos pontos. Ou seja, para m grande, $x_{n+i} = f(f(f(...f(x_n)...))) = f^{(i)}(x_n) = x_n$. Com um período grande, a função pode ser vista como uma função caótica, uma vez que seus pontos são pseudo-aleatórios e demoram a se repetir.

Ponto fixo de 2ª ordem

Para o ponto fixo de segunda ordem tem-se que os pontos de repetição se dão em $x_{n+2} = x_n$, ocorre então uma subdivisão da equação para 4 situações, em que analisa-se cada caso:

(a): $x_n < 0.5$ e $x_{n+1} < 0.5$;
(b): $x_n < 0.5$ e $x_{n+1} \geq 0.5$;
(c): $x_n \geq 0.5$ e $x_{n+1} < 0.5$;
(d): $x_n \geq 0.5$ e $x_{n+1} \geq 0.5$.

Procura-se assim os pontos para que $f(f(x_n)) = x_n$ nestes intervalos:

(a): $x_n = mx_{n+1} = m(mx_n) = m^2x_n$

(b): $x_n = m(1 - x_{n+1}) = m(1 - (mx_n)) =$
$= m - m^2x_n$

(c): $x_n = m(x_{n+1}) = m(m(1 - x_n)) =$
$= m^2 - m^2x_n$

(d): $x_n = m(1 - x_{n+1}) =$
$= m(1 - m(1 - x_n)) = m - m^2 + m^2x_n$

- Quando se considera o afastamento de x_n de zero, percebe-se que em algum momento x_{n+1} será igual a 0.5, e assim, recaíra-se na *Eq. (c)*, para se descobrir este valor, tem-se então $x_{n+1} = 0.5 = mx_n$, logo, $x_n = \frac{1}{2m}$ e este é um ponto de troca de equações.
- Tomando-se então agora, valores $x_n \geq 0.5$ tais que $x_n \approx 1 \Rightarrow x_{n+1} < 0.5$, recai-se na *Eq. (b)*, mas, conforme x_n decresce, x_{n+1} cresce, até o ponto em que ambos sejam maiores que 0.5, este ponto é tal que $x_{n+1} = 0.5 = m(1 - x_n) \Rightarrow x_n = 1 - \frac{1}{2m}$.

Assim:

$$x_{n+2} = \begin{cases} m^2x_n, & \text{se } 0 \leq x_n < \frac{1}{2m} \\ m - m^2x_n, & \text{se } \frac{1}{2m} \leq x_n < 0.5 \\ m^2 - m^2x_n, & \text{se } 0.5 \leq x_n < 1 - \frac{1}{2m} \\ m - m^2 + m^2x_n, & \text{se } 1 - \frac{1}{2m} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{17}$$

A condição para que seja ponto fixo estável em segunda ordem é $|f'(x_{n+2})| < 1$. Para *(a)* e *(d)* tem-se $|f'(x_{n+2})| = |m^2| = m^2 < 1$; e para *(b)* e *(c)*: $|f'(x_{n+2})| = |-m^2| = m^2 < 1$; assim, a condição para se ter pontos fixos de segunda ordem estáveis em qualquer ponto da equação é $m^2 < 1 \Rightarrow m < \pm 1$ como $m \in [0, 2] \Rightarrow m < 1$.

$$m < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2m} \tag{18}$$

$$\text{e:} \; -\frac{1}{2} > -\frac{1}{2m} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2m} \tag{19}$$

Pela *Eq. 18* e *Eq. 19* vê-se que é impossível ter um ponto fixo estável de segunda ordem $x*$ tal que $\frac{1}{2m} \leq x* < 0.5$ e $0.5 \leq x* < 1 - \frac{1}{2m}$, intervalos *(b)* e *(c)*.

Procuram-se os valores de m com o teste dos limites de intervalo para as respectivas equaçãoes:

(a) $\Rightarrow 0 \leq x* < \frac{1}{2m}$:

$$x* = 0 \Rightarrow 0 = m^2 0 \Rightarrow m = \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{20}$$

$$x* = \frac{1}{2m} \Rightarrow \frac{1}{2m} = m^2 \frac{1}{2m} \Rightarrow m = \pm 1 \tag{21}$$

(d) $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2m} \leq x* \leq 1$:

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(x* - 1)x*}}{2(x* - 1)} \tag{22}$$

$$\text{Para: } x* = 1 - \frac{1}{2m} \Rightarrow$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 - \frac{1}{2m} - 1)(1 - \frac{1}{2m})}}{2(1 - \frac{1}{2m} - 1)}$$

$$m = -m\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{2m} + \frac{4}{4m^2}}\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{4m^2 - 8m + 4}{4m^2}}\right)^2 = 0^2 = m^2 - 2m + 1$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow m = 1 \tag{23}$$

$$\text{Para: } x* = 1 \Rightarrow$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - 1)1}}{2(1 - 1)} \Rightarrow m \to \infty \tag{24}$$

m diverge.

Por fim obtém-se então das *Eq. 20, 21, 23 e 24* os m's relacionados a estabilidade dos pontos fixos.

Primeiramente, não há grande interesse pelo caso trivial, uma vez que deseja-se um número limitado de m's (*Eq. 20*), entretanto a partir dele e da análise de 1ª ordem, pode-se pensar no caso em que $x_n, x_{n+1} < 0.5$ e $m < 1$ de forma que $x* = x_{n+2} = x_n = 0$ e 0 é um ponto fixo estável de 2ª ordem, depois, deve-se ter em mente que $m \in [0, 2]$, logo o valor da *Eq. 24* não é válido e, pelo mesmo motivo, m de *Eq. 21* e *Eq. 23* são iguais e os únicos validos.

Ou seja, como parte-se de $m < 1$ e chega-se em $m = 1$, sem contar o 0, não existem pontos fixos estáveis acima de segunda ordem. E assim, os pontos fixos (instáveis) de segunda ordem são dados por: $x* = \frac{1}{2(1)} \Rightarrow x* = 0.5$ e também $x* = 1 - \frac{1}{2(1)} \Rightarrow x* = 0.5$. Ou, o único ponto fixo de segunda ordem é o ponto $x* = 0.5$. O que é plausível de se imgainar, pois a relação entre as funções da *Eq. 17* e seus intervalos foram tomadas a partir do ponto de troca das funções ainda referente a *Eq. 1*, que é $x_n = 0.5$.

Para segunda ordem tem-se então dois pontos fixos um estável ($x* = 0$) e um instável ($x* = 0.5$).

Coeficiente de Lyapunov

Uma característica de funções caóticas é o fato de serem muito sensíveis a valores de condições iniciais, de forma que ao se alterar pouco um valor inicial a resposta final refletida se torna muito grande.

A taxa com que a distância entre dois pontos aumenta em função das iterações é o coeficiente de Lyapunov. Consideradas duas trajetórias de pontos, x e $x+\delta$, tem-se a sequência em relação as iterações $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e $x_1+\delta_1, x_2+\delta_2, x_3+\delta_3, ..., x_n+\delta_n$, expandindo-se x em torno do infinitésimo $x+\delta$, obtém-se então pela primeira ordem de aproximação:

$$
\begin{aligned}
f(x_n+\delta_n) = f(x_n) + f'(x_n)\delta_n \Rightarrow \\
x_{n+1}+\delta_{n+1} = x_{n+1} + f'(x_n)\delta_n \Rightarrow \\
\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = f'(x_n)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\frac{\delta_1}{\delta_0}\frac{\delta_2}{\delta_1}\cdots\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_n)
$$

$$
\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = \prod_{i=0}^{n-1}|f'(x_i)| \tag{26}
$$

Ou seja, a proporção da distância dos resultados, em função da diferença δ é a multiplicação das derivadas em cada ponto (*Eq. 26*), como os índices são mudos, pode-se tomar o comportamento de $i = 1 \to n$ sem perda de generalidade. Por se tratar de uma série de multiplicações, inferi-se que o comportamento seja equivalente ao de uma exponencial para um coeficiente de crescimento a definir:

$$
e^{\lambda_L n} = \left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = \prod_{i=1}^{n}|f'(x_i)| \Rightarrow
$$

$$
\lambda_L.n = ln\prod_{i=1}^{n}|f'(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} ln|f'(x_i)|
$$

$$
\lambda_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln|f'(x_i)| \tag{27}
$$

Pela *Eq. 27* é então definido o coeficiente de lyapunov, que é usado para interpretar-se o desenvolvimento de uma função, o quão caótica ela é e em que pontos assim se comporta. O coeficiente λ_L se comporta como uma media ponderada dos modulos das derivadas, com o peso dado em função de um logaritmo. Ou seja, é mais preciso para variações próximas de 1. Nos pontos em que $\lambda_L = 0$, pode-se pensar em aproximadamente $ln|f'(x(m))| = 0 \approx |f'(x(m))| = 1$, o que representa, em relação a m, um ponto em que as variações dos pontos seguintes para os anteriores é a mesma (*Eq. 9*), logo, a função teria um estado estacionário, um ponto intermediário entre convergência e divergência da equação, o que pode representar uma bifurcação para os valores de x_n dependentes de m, ou, para $n \to \infty$, o ponto intermediário entre pontos fixos estáveis e instáveis.

Programa

Na análise, foram-se calculados 600 m's, para $0.9 \leq m \leq 2$ e para cada m calcularam-se 700 pontos de x, dos quais os 300 primeiros foram descartados, com o objetivo de se excluir a fase transiente da função. Gerou-se então o seguinte programa:

```
...
main ()
{
int n = 700;
double x[n], m, lyap;
int i;

FILE*dat = fopen("bigfile.dat","w");
FILE*arq = fopen("lyap.dat","w");

m = 0.9;
x[0] = 0.5;
lyap = 0;

while (m<=2)
{

for (i=0;i<n-2;i++)
{
if (x[i]<0.5) x[i+1] = m*x[i];
if (x[i]>=0.5) x[i+1] = m*(1-x[i]);
}

for (i=300;i<n-1;i++)
{
fprintf(dat,"%lf\t%lf\n",m,x[i]);
lyap = lyap + log(m);
}

lyap = lyap/(n-300);
fprintf(arq,"%lf\t%lf\n",m,lyap);
m += (2-0.9)/600;

}

lyap = lyap/(n-300);
}
...
```

Análise Gráfica

Bifurcações

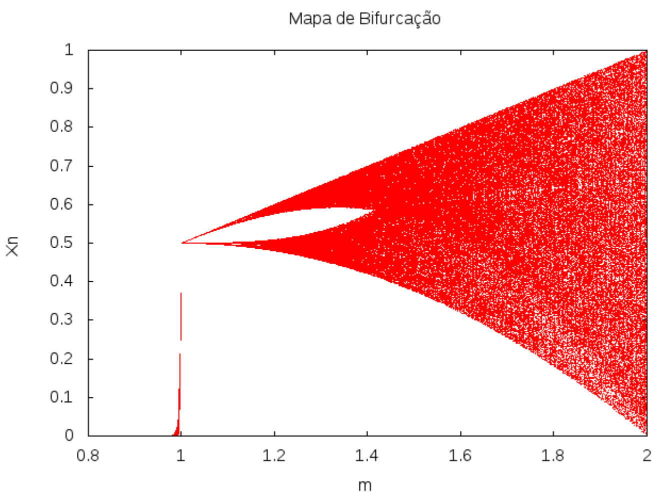

Figura 1: *Gráfico de Bifurcações.*

Obteve-se então o gráfico mostrado na *Figura 1* para os *Pontos* x_n x m, onde pode-se perceber claramente o comportamento de bifurcação. Tem-se que até m próximo de 1 todos os 400 pontos de x_n se encontram em 0. A partir de $m = 1$ ocorre uma bifurcação e agora os pontos demarcam dois caminhos difusos que oscilam em torno do ponto fixo instável ($x* = 0.5$). Conforme cresce m, aumentam-se a difusão e os pontos ficam menos concentrados no que seriam possíveis pontos fixos estáveis de segunda ordem. Para valores maiores, proximos de $m = 2$, a complexidade do comportamento aumenta muito, não se separam mais os dois "braços"de pontos e o período de repetição dos valores é muito grande e difícil de se determinar.

Lyapunov

Na *Figura 2* é exposto o comportamento do coeficiente de Lyapunov pelo coeficiente m. como analisa-se logaritmicamente, para valores negativos a função é bem comportada, uma vez que as variações são menores que 1 ($ln|f'(x)| < 1 \rightarrow 0 < |f'(x)| < 1$), assim também, pode-se perceber que para $\lambda_L = 0 \rightarrow \langle |f'(x)| \rangle = 1 \approx |f'(x)| = 1$. Assim, a partir do ponto $m = 1$ a função inicia um comportamento caótico, com o ápice para $m \approx 2$.

Pode-se notar que a função cruza apenas uma vez o ponto $\lambda_L = 0$, ou seja, há apenas um ponto de bifurcação, o que corrobora com os resultados obtidos na análise de estabilidade, em que para ordem maior que um não há pontos de bifurcação (ponto de passagem de ponto fixo estável para ponto fixo instável), uma vez que não há pontos fixos estáveis.

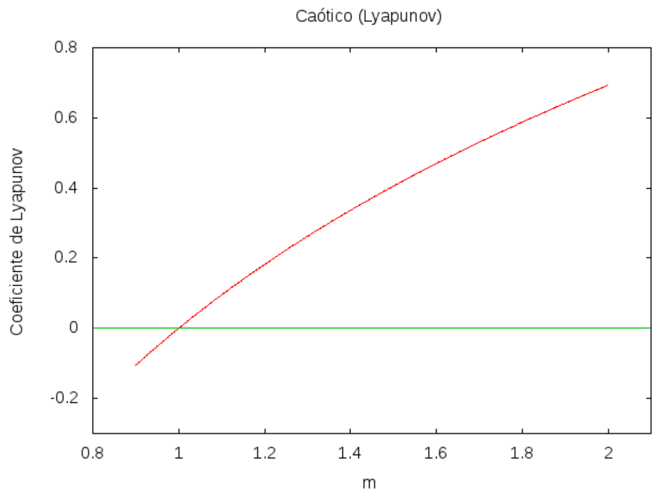

Figura 2: *Gráfico de Lyapunov.*

Visualiza-se então que para $m < 1$, em qualquer ordem, os pontos fixos são estáveis e convergem pra 0, logo a função é previsível e bem comportada. Já para $m > 1$, em qualquer ordem, não há pontos fixos estáveis e assim tem-se uma função pouco previsível e caótica.

Conclusão

O trabalho mostrou a análise de uma função, aparentemente simples. Vê-se que de uma equação com comportamentos localmente lineares para x_n específicos, tal que $x_{n+1} = (mx_n, m(1-x_n)$, pode-se tirar informações importantes, como por exemplo, o ponto em que a função exprime mais claramente seu comportamento não linear, o ponto em que age de forma oscilatória e os instantes em que não há como prever seu comportamento. Este estudo trata de sistemas dinâmicos, em que se procura ordenações e comportamentos claros em meio à desorganização (caos). Com ideias como pontos atratores e pontos fixos de 2^{a} ordem (que oscilam os atratores), pode-se iniciar um processo de aplicação dos conhecimentos teóricos a sistemas caóticos reais, como turbulências, clima, sistemas naturais. Uma aplicação extremamente prática, no vies teórico, é a criação de geradores de números aleatórios, que tem infindáveis aplicações nos cálculos computacionais pois efetuam uma aproximação mais real das situações físicas existentes, onde muitos comportamentos são caóticos e não-lineares.