

# Introducción a los métodos numéricos para EDEs

(Seminario de matemáticas Aplicadas)

Saúl Díaz Infante

CIMAT A.C.

6 de octubre de 2017



CIMAT



# Por que EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*



CIMAT



# Por que EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*

## Crecimiento de Poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t) \quad N_0 = N(0) = cte.$$



# Por que EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*

## Crecimiento de Poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t) \quad N_0 = N(0) = cte.$$

$$a(t) = r(t) + \text{"ruido"}$$



# Por que EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*

## Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



# Por que EDEs?

En ocasiones

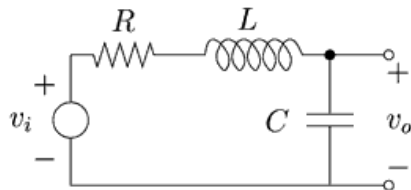
*EDO + ruido = Mejor modelo*

## Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



# Por que EDEs?

En ocasiones

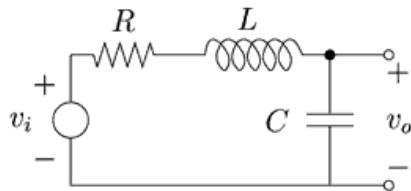
*EDO + ruido = Mejor modelo*

## Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



$$F(t) = G(t) + \text{"ruido"}$$



# Por que EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*

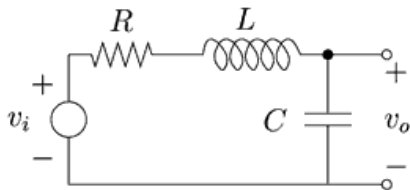
## Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$

$$Q(t) = Z(t) + \text{"ruido"}$$



$$F(t) = G(t) + \text{"ruido"}$$





# Por que EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*

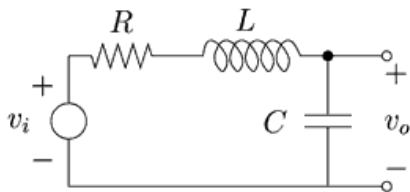
## Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$

$$Q(t) = Z(t) + \text{"ruido"}$$



$$F(t) = G(t) + \text{"ruido"}$$

Estima  $Q(t)$  observando  $Z(t)$



# Por que hacer métodos numéricos para EDEs?

En ocasiones

*EDO + ruido = Mejor modelo*

**Solución analítica?**

muy RARA

**Usa**

Teoría de diferencias finitas y haz una extensión estocástica.



# Objetivo

## Objetivo de la charla

**Ilustrar** como aproximar soluciones de EDEs a partir de **conocimientos básicos** de los **métodos deterministas** y nociones muy elementales de variables aleatorias.



# Plan de Charla

- 1 **Simulación de Movimiento Browniano**
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Plan de Charla

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Plan de Charla

- 1 Simulación de Movimiento Browniano**
- 2 Integración Estocástica**
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs**
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Plan de Charla

- 1 Simulación de Movimiento Browniano**
- 2 Integración Estocástica**
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs**
- 4 propiedades teóricas**
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos**
- 6 Comentarios Finales**



# Plan de Charla

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales





# Plan de Charla

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Métodos Steklov

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



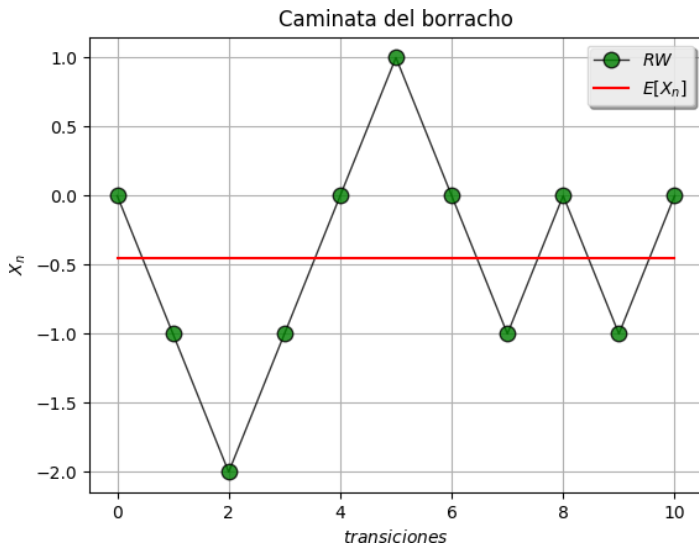
# Historia



CIMAT

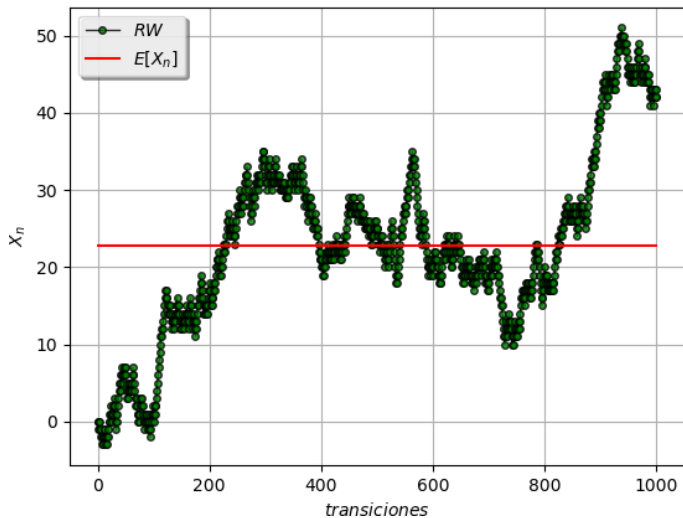


# Caminata Aleatoria



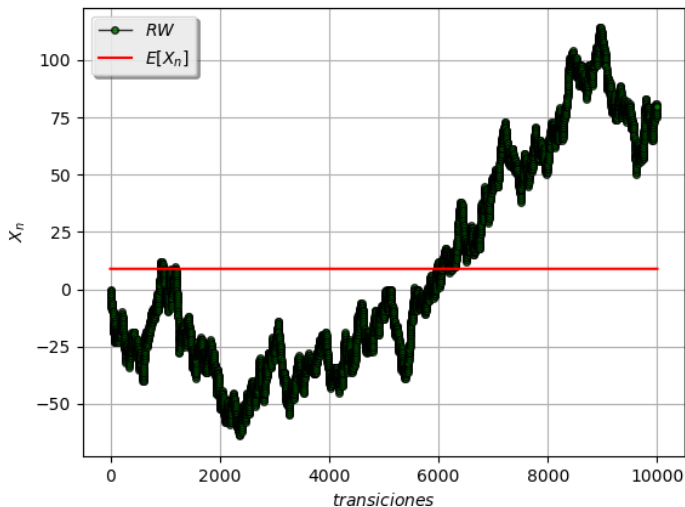
# Caminata Aleatoria

## Caminata del borracho



# Caminata Aleatoria

## Caminata del borracho



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$
$$n\delta < t < (n+1)\delta$$
$$t > 0.$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$





# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$
$$n\delta < t < (n+1)\delta$$
$$t > 0.$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

## Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$  fijo. Calcula

▶ característica  $\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} \right].$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} \right] &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_j} \right] \\ &= \left( \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda X_j} \right] \right)^n \\ &= \left( \frac{1}{2} e^{i\lambda h} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda h} \right)^n \\ &= (\cos(\lambda h))^n \\ &= (\cos(\lambda h))^{\frac{t}{\delta}}. \end{aligned}$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (\cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}}$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (\cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}}$$

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta} \lambda^2 h^2}$$

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} \right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta} t \lambda^2 h^2}.$$



# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (\cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}} \quad h^2 = \delta$$

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} \right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$





# Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ v.a.i.i.d}$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$Y_{\delta,h}(0) = 0$$

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Interpola linealmente

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta$$

$$t > 0.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (\cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}} \quad h^2 = \delta$$

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} \right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore B(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} Y_{\delta,h}(t)$$



# Construcción

## Teorema

Sea  $Y_{\delta,h}(t)$  una caminata aleatoria que inicia en 0 de saltos  $h$  y  $-h$  con igual probabilidad en los tiempos  $\delta, 2\delta, 3\delta, \dots$ . Asumamos que  $h^2 = \delta$ . Entonces para cada  $t \geq 0$ , el limite

$$B(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Y_{\delta,h}(t),$$

existe en distribución. Además, tenemos que

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\lambda B(t)} \right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



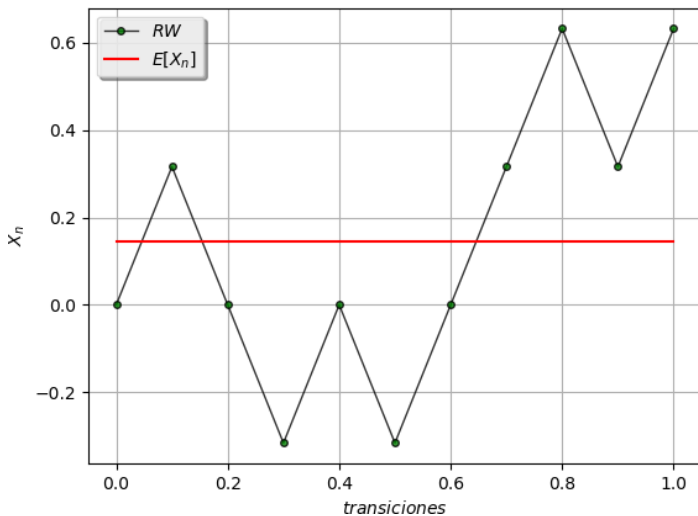
# Código

```
1 N=1000
2 T=1.0
3 delta = T/np.float(N)
4 h=1.0/np.sqrt(np.float(N))
5 t=np.linspace(0,T,N+1)
6 b= np.random.binomial(1,.5, N) # bernulli 0,1
7 omega=2.0*b-1 # bernulli -1,1
8 Xn=h*(omega.cumsum()) # bernulli -h,h
9 Xn=np.concatenate(([0], Xn))
```



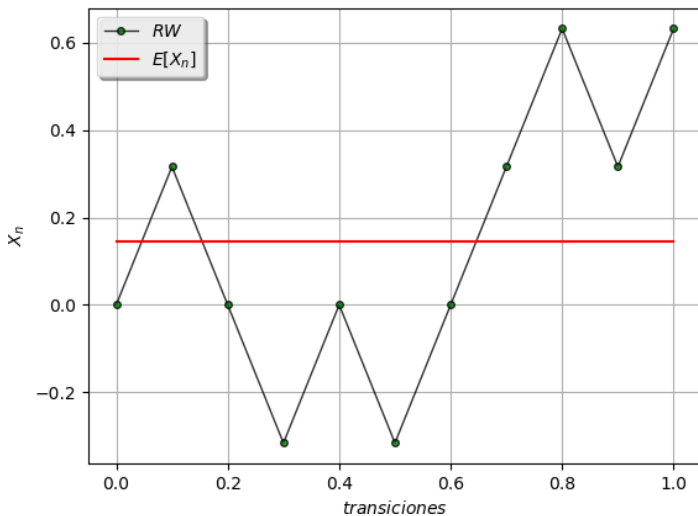
# Caminata Aleatoria de $n$ transiciones

Construcción teorema Kuo



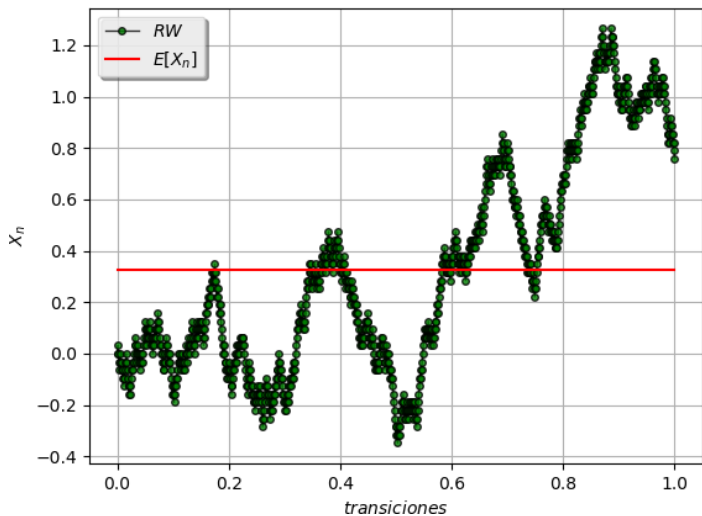
# Caminata Aleatoria de $n$ transiciones

Construcción teorema Kuo



# Caminata Aleatoria de $n$ transiciones

Construcción teorema Kuo



# Construcción

## Construcción

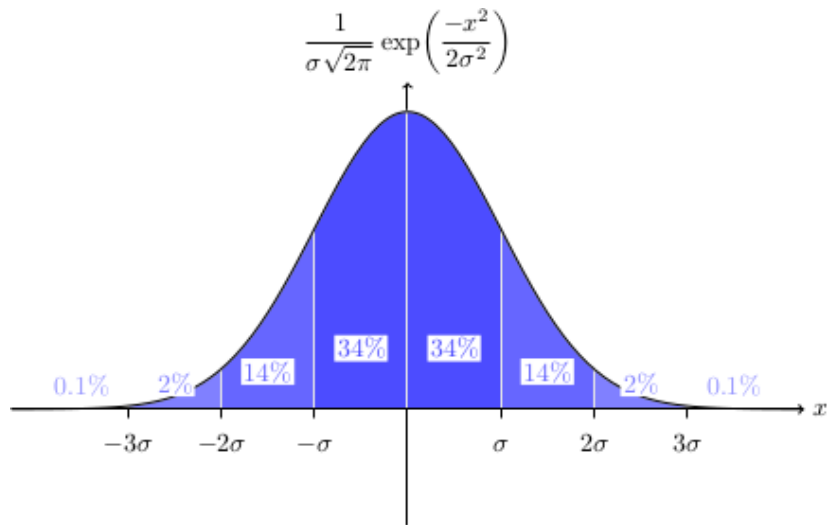
$$h^2 = \delta$$

$$Y_{\delta,h}(t) \xrightarrow[\delta,h \rightarrow 0]{\mathcal{D}} B(t) \quad \forall t \geq 0$$

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\lambda B(t)} \right] \xrightarrow[\delta,h \rightarrow 0]{} e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

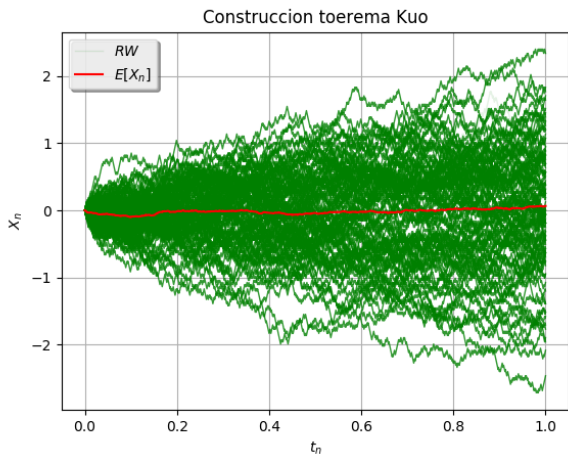


# Distribución Gaussiana

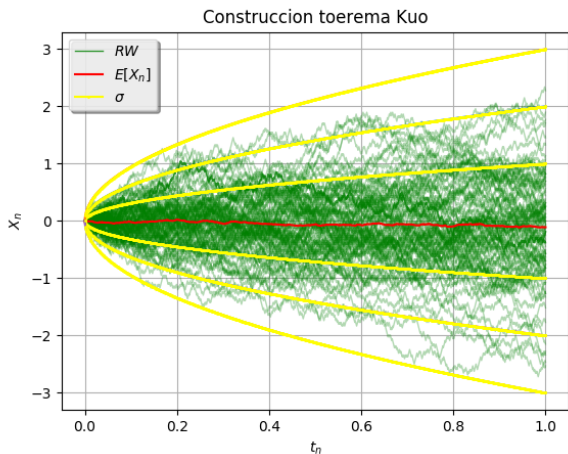




# Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



# Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



# Métodos Steklov

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Métodos Steklov

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 **Construcción general es esquemas para EDEs**
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Métodos Steklov

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 **propiedades teóricas**
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$
$$x(0) = x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$



# Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ x(0) &= x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$$



# Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ x(0) &= x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$





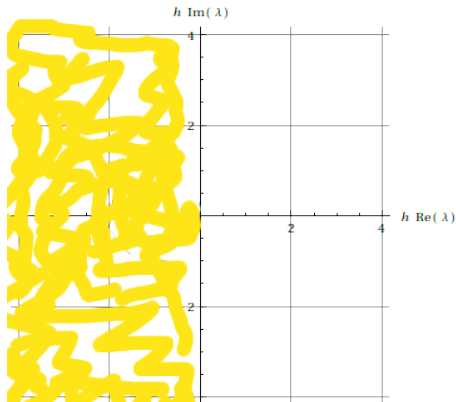
## Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

$$x(0) = x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$



# Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$



# Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$



# Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda x_n h + x_n \\ &= x_n(\lambda h + 1) \\ &\vdots \\ &= x_0(\lambda h + 1)^{n+1}\end{aligned}$$



# Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$



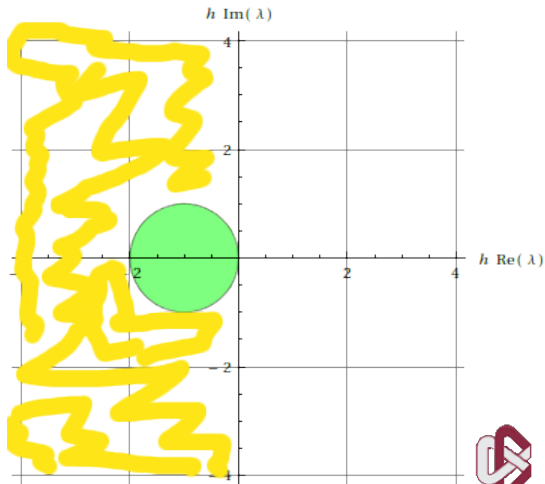
## Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$



CIMAT

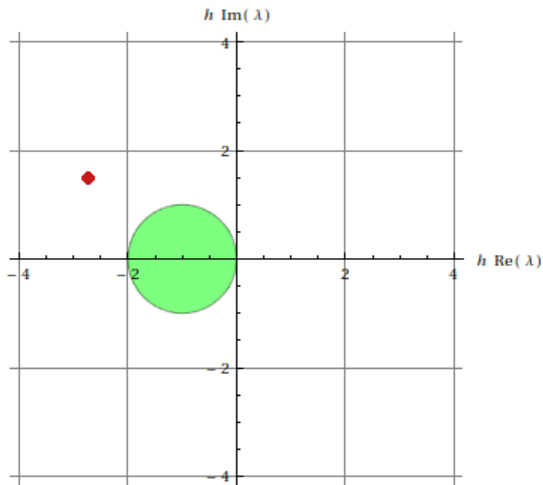
## Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$



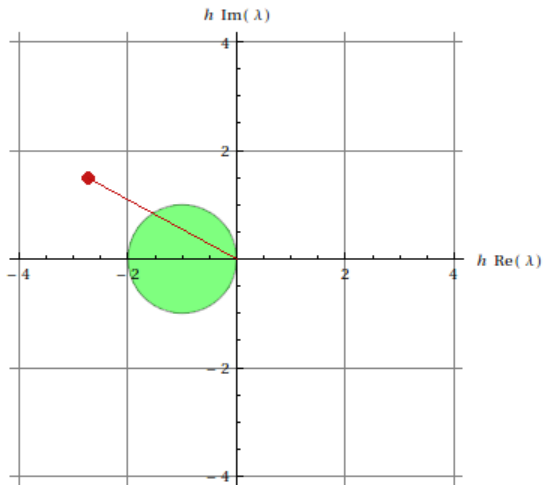
## Estabilidad Lineal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$





# Estabilidad lineal EDEs

Consideremos

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = \text{cte.}, \lambda, \beta \in \mathbb{C}.$$

(DP)



CIMAT



## Estabilidad lineal EDEs

Consideremos

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = \text{cte.}, \lambda, \beta \in \mathbb{C}. \quad (\text{DP})$$

## Solución exacta

$$X_t = X_0 \exp(\lambda t) + \beta \int_0^t \exp(\lambda(t-s)) dB_s \quad (*)$$

$$\mathbb{E}[X_t] = \exp(\lambda t) \mathbb{E}[X_0] \quad (**)$$

$$\mathbb{E}[|X_t|^2] = \exp(2\text{Re}(\lambda)t) \mathbb{E}[|X_0|^2] - \frac{|\beta|^2}{2\text{Re}(\lambda)} (1 - \exp(2\text{Re}(\lambda)t)). \quad (***)$$

## Estabilidad lineal EDEs

Consideremos

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte., \lambda, \beta \in \mathbb{C}. \quad (\text{DP})$$

(DP) tiene solución asintótica-estable

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X(t)| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] &= -\frac{|\beta|^2}{2\operatorname{Re}(\lambda)} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \end{aligned}$$



# Estabilidad Lineal

## Definición

$X(t)$  es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X(t)|] = 0.$$



# Estabilidad Lineal

## Definición

$X(t)$  es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X(t)|] = 0.$$

## Definición

$X(t)$  es asintóticamente estable en media cuadrática (AEMC) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2\operatorname{Re}(\lambda)}.$$



# Estabilidad Lineal

## Definición

$X(t)$  es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X(t)|] = 0.$$

## Definición

$X(t)$  es asintóticamente estable en media cuadrática (AEMC) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

## Definición

La solución numérica es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|] = 0.$$

## Definición

La solución numérica es asintóticamente estable en media cuadrática (AEMC) si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

# A-estabilidad

Buscamos  $\lambda h$

para los cuales el método Steklov **reproduce correctamente** la **estabilidad en media y media cuadrática**.



# A-estabilidad

## Definición

Diremos que un método será **A-estable** en **media o media cuadrática** si [?]

Problema estable  $\Rightarrow$  método estable  $\forall h$





$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (DP)$$



$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = \text{cte}, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{DP})$$

## Euler-Mayurama

$$X_{n+1} = (1 + \lambda h)X_n + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$



$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = \text{cte}, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{DP})$$

## Euler-Mayurama

$$X_{n+1} = (1 + \lambda h)X_n + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$



$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (DP)$$

## Euler-Mayurama

$$X_{n+1} = (1 + \lambda h)X_n + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)(1 + \lambda h)^{n+1}$$



$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{DP})$$

### Euler-Mayurama

$$X_{n+1} = (1 + \lambda h)X_n + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$

### Steklov

$$X_{n+1} = X_n \exp(\lambda h) + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)(1 + \lambda h)^{n+1}$$



$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (DP)$$

### Euler-Mayurama

$$X_{n+1} = (1 + \lambda h)X_n + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)(1 + \lambda h)^{n+1}$$

### Steklov

$$X_{n+1} = X_n \exp(\lambda h) + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h}V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$

$$E(X_{n+1}) = E(X_0) \exp((n+1)\lambda h)$$



$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = \text{cte}, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{DP})$$

## Teorema

*El método Steklov para la ecuación (DP) es A-estable en media.*

## Steklov

$$X_{n+1} = X_n \exp(\lambda h) + \beta \Delta B_n$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$$

$$B_n = \sqrt{h} V_n$$

$$V_n \sim N(0, 1).$$

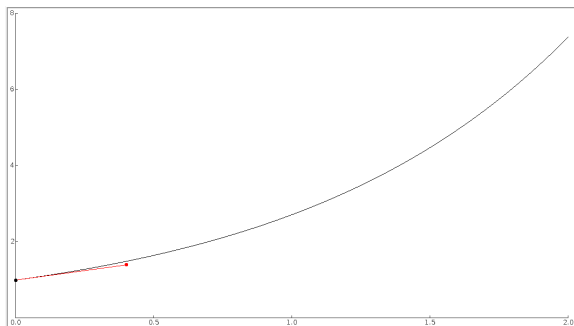


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$



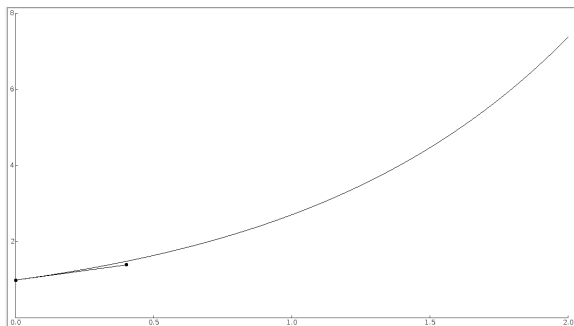


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

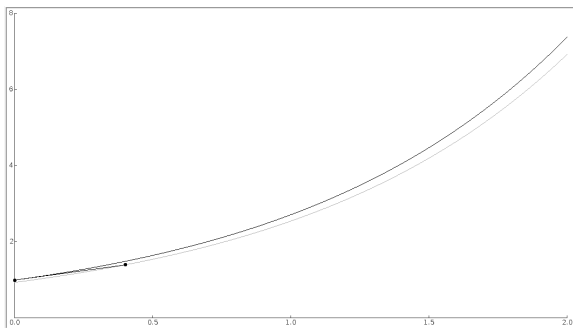


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

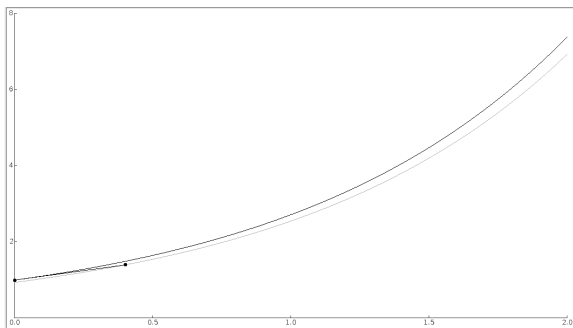


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

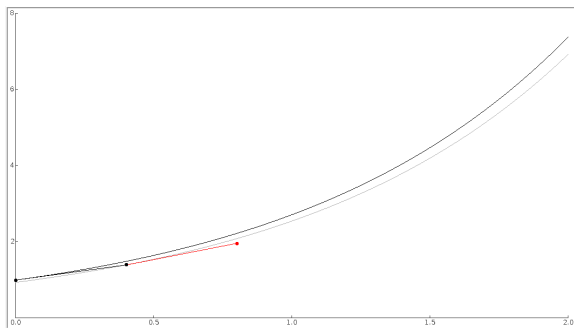


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

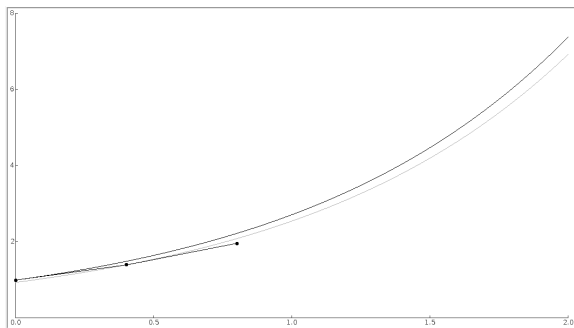


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

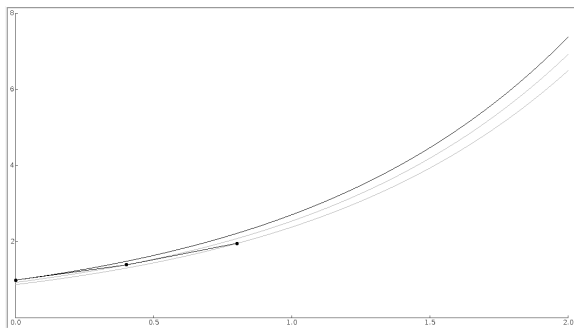


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

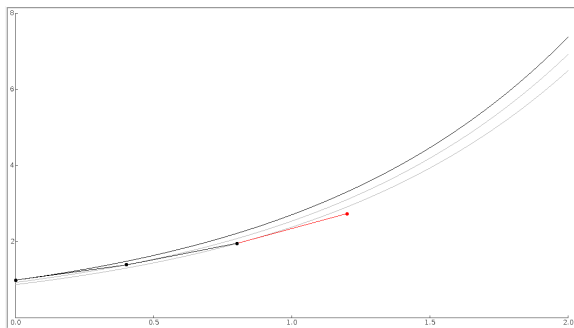


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

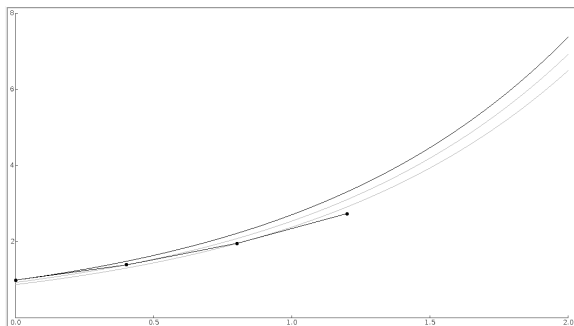


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$



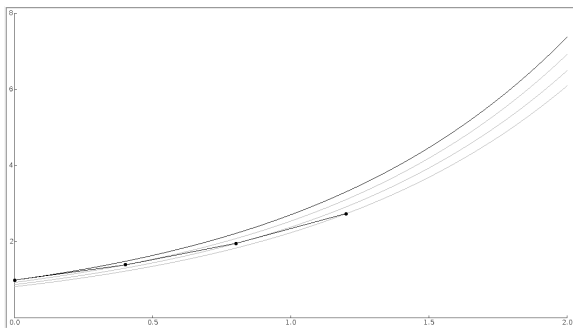


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

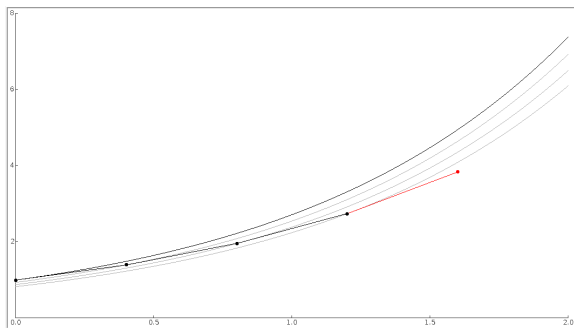


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

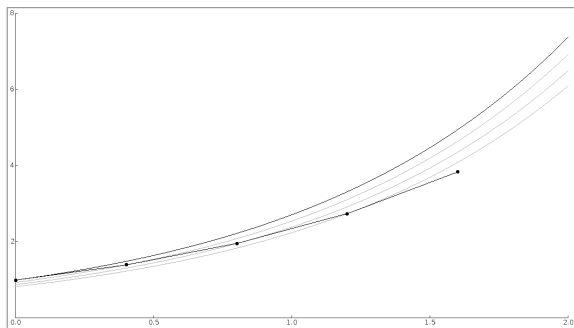


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

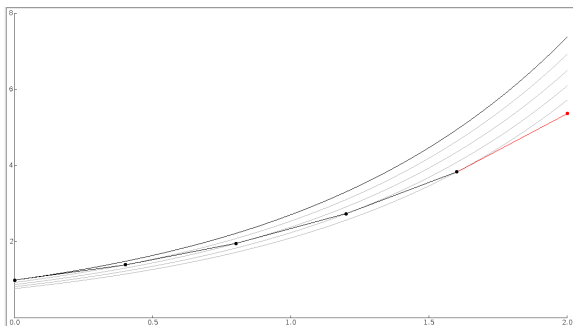


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

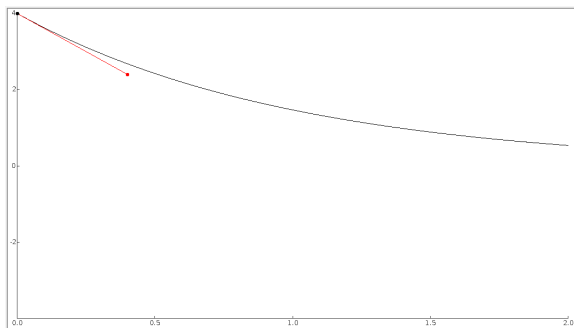


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

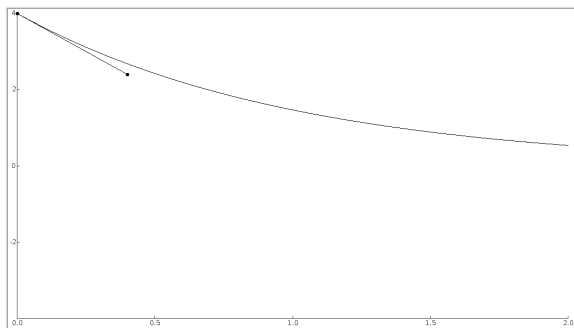


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

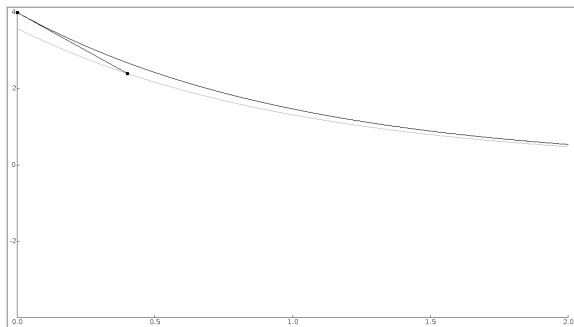


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

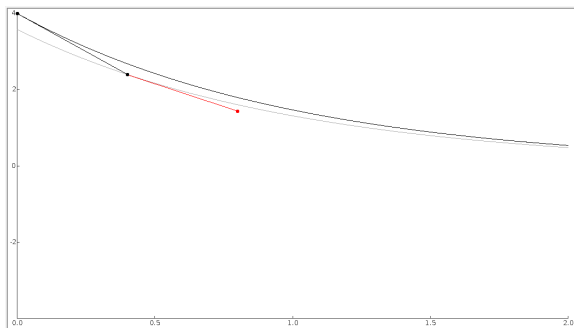


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$



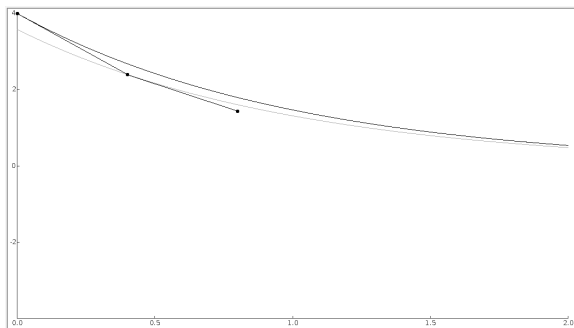


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

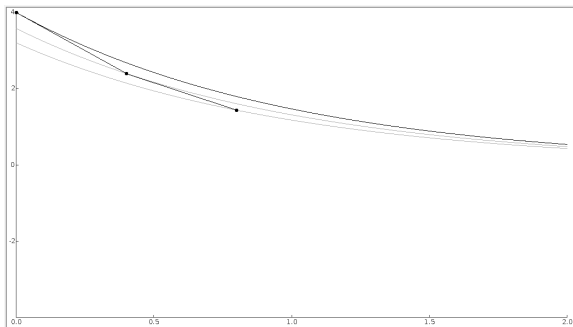


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

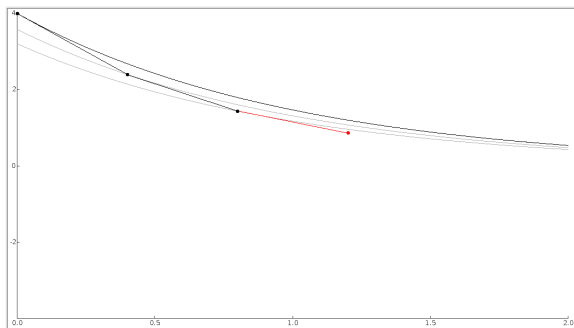


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

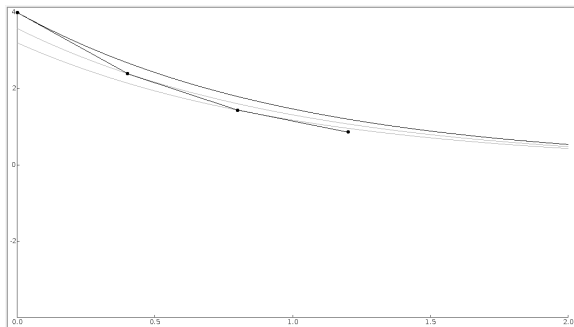


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

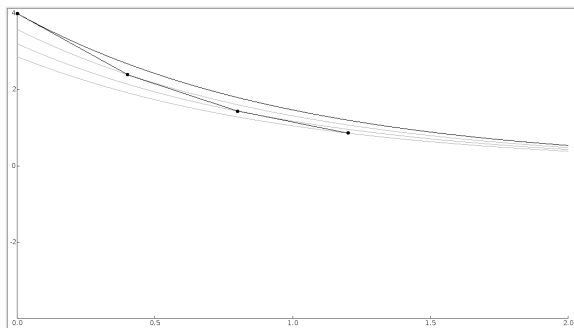


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

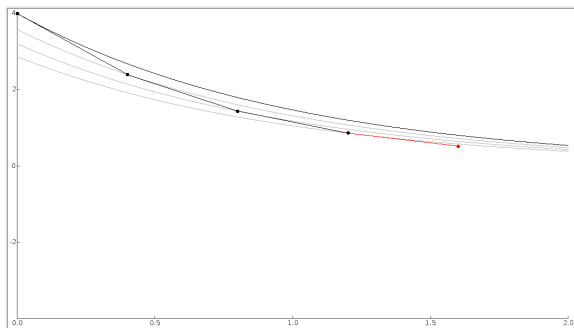


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

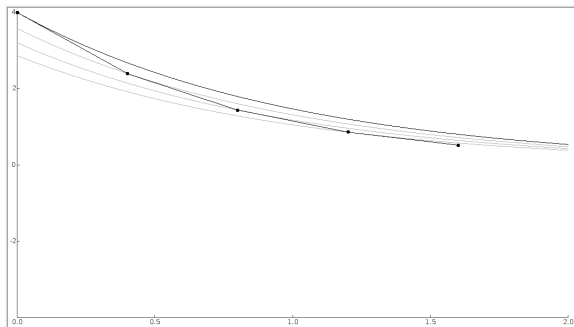


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$

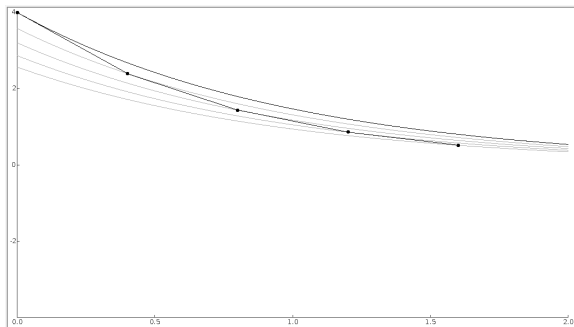


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$



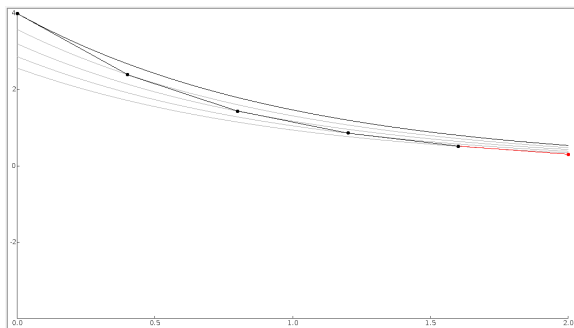


# Consistencia, convergencia y estabilidad determinista

## Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{local})$$

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad (\text{global})$$



$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

### Definición (Consistencia)

$$\Psi(t, x, 0) = a(t, x).$$



$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

### Definición (Consistencia)

$$\Psi(t, x, 0) = a(t, x).$$

### Definición (Convergencia)

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} |e_{n+1}| = 0$$



$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

## Teorema

Si  $\Psi$  satisfice

- (Lipschitz en  $(t, x, h)$ )
- (Acotada)

entonces convergente  $\Leftrightarrow$   
consistente.



$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

## Teorema

Si  $\Psi$  satisface

- (Lipschitz en  $(t, x, h)$ )
- (Acotada)

entonces convergente  $\Leftrightarrow$   
consistente.

## Definición (numéricamente estable)

Dados  $[t_0, T]$  y (EDO),  $\exists h_0, M$  t.q.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

## Teorema

Si  $\Psi$  satisfice

- (Lipschitz en  $(t, x, h)$ )
- (Acotada)

entonces convergente  $\Leftrightarrow$   
consistente.

## Teorema

Consistencia  $\Rightarrow$  Estabilidad  
Convergencia

## Definición (numéricamente estable)

Dados  $[t_0, T]$  y (EDO),  $\exists h_0, M$  t.q.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

## Teorema

Si  $\Psi$  satisfice

- (Lipschitz en  $(t, x, h)$ )
- (Acotada)

entonces convergente  $\Leftrightarrow$   
consistente

## Definición (NAE)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

## Teorema

Consistencia  
Convergencia  $\Rightarrow$  Estabilidad

## Definición (numéricamente estable)

Dados  $[t_0, T]$  y (EDO),  $\exists h_0, M$  t.q.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

# Métodos Steklov

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales





# Métodos Steklov

- 1 Simulación de Movimiento Browniano
- 2 Integración Estocástica
- 3 Construcción general es esquemas para EDEs
- 4 propiedades teóricas
  - Estabilidad lineal
  - Consistencia y estabilidad
- 5 Resultados numéricos
- 6 Comentarios Finales



# Teorema de existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea  $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$  en el sentido de Itô. Si los coeficientes son

(EU1) (Medibles):  $a, b$  son  $\mathcal{L}^2$ -medibles en  $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$ .

(EU2) (Lipschitz):  $\exists K > 0$  t.q.  $\forall t \in [t_0, T], x, y \in \mathbb{R}$ .

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|,$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

(EU3) (De crecimiento lineal acotado):  $\exists K > 0$  t.q.  $\forall t \in [t_0, T], x \in \mathbb{R}$

$$|a(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2),$$

$$|b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial) :  $X_{t_0}$  es  $\mathcal{A}_{t_0}$ -medible con  $\mathbb{E}(|X_{t_0}|) < \infty$ .

Entonces,  $\exists ! X_t$  en  $[t_0, T]$  con  $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$ .

# Promedio de Steklov

## Promedio de Steklov

$$F(X_t) \approx \varphi(X_n, X_{n+1}) = \left( \frac{1}{X_{n+1} - X_n} \int_{X_n}^{X_{n+1}} \frac{du}{F(u)} \right)^{-1}$$

$$t_n \leq t \leq t_{n+1},$$

$$X_n = X_{t_n}, \quad t_n = nh.$$

◀ Ej: EDEMult

◀ idea



CIMAT



# Lema de Gronwall

## Lema (de Gronwall)

Sean  $\alpha, \beta : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables t.q.

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \quad t \in [t_0, T].$$

Entonces

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \beta(s) ds$$

◀ Prueba



CIMAT



# Desigualdad de Lyapunov

Sea  $X$  una v.a integrable y  $0 < q \leq p$  entonces

**Sea  $X$  una v.a integrable y  $0 < q \leq p$  entonces**

$$\mathbb{E}(|X|^q) \leq \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{q}{p}}$$

◀ Prueba



CIMAT



## Propiedades Integral de Itô

$$1 \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T g(r) dB_r \right] = 0$$

$$2 \quad (\text{Isometría}) \quad \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T g(r) dB_r \right)^2 \right] = \int_0^T g^2(r) dr$$

◀ Prueba

# Referencias I



# Teorema de existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea  $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$  en el sentido de Itô. Si los coeficientes son

(EU1) (Medibles):  $a, b$  son  $\mathcal{L}^2$ -medibles en  $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$ .

(EU2) (Lipschitz):  $\exists K > 0$  t.q.  $\forall t \in [t_0, T], x, y \in \mathbb{R}$ .

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|,$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

(EU3) (De crecimiento lineal acotado):  $\exists K > 0$  t.q.  $\forall t \in [t_0, T], x \in \mathbb{R}$

$$|a(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2),$$

$$|b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial) :  $X_{t_0}$  es  $\mathcal{A}_{t_0}$ -medible con  $\mathbb{E}(|X_{t_0}|) < \infty$ .

Entonces,  $\exists ! X_t$  en  $[t_0, T]$  con  $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$ .



# Promedio de Steklov

## Promedio de Steklov

$$F(X_t) \approx \varphi(X_n, X_{n+1}) = \left( \frac{1}{X_{n+1} - X_n} \int_{X_n}^{X_{n+1}} \frac{du}{F(u)} \right)^{-1}$$

$$t_n \leq t \leq t_{n+1},$$

$$X_n = X_{t_n}, \quad t_n = nh.$$

◀ Ej: EDEMult

◀ idea



CIMAT



# Lema de Gronwall

## Lema (de Gronwall)

Sean  $\alpha, \beta : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables t.q.

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \quad t \in [t_0, T].$$

Entonces

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \beta(s) ds$$

◀ Prueba



CIMAT



# Desigualdad de Lyapunov

Sea  $X$  una v.a integrable y  $0 < q \leq p$  entonces

**Sea  $X$  una v.a integrable y  $0 < q \leq p$  entonces**

$$\mathbb{E}(|X|^q) \leq \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{q}{p}}$$

◀ Prueba



CIMAT



## Propiedades Integral de Itô

$$1 \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T g(r) dB_r \right] = 0$$

$$2 \quad (\text{Isometría}) \quad \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T g(r) dB_r \right)^2 \right] = \int_0^T g^2(r) dr$$

◀ Prueba

