計算機概論レポート課題１：数学問題集

東方涼介 (1w162268-5)

2019 年 4 月 16 日

1　問題

問題 A.

(1) 正の実数であって, 任意の正の実数 y に対して,

$$y^x \leq x^y$$

となる x を求めよ。

(2) 正の整数であって, 任意の正の整数 m に対して,

$$m^n \leq n^m$$

となる n を求めよ。

問題 B. 以下の図 1B-1 のように 5 頂点 A,B,C,D,E がある。

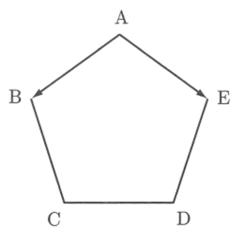

図 1B-1：5 頂点 A,B,C,D,E の配置

今, 動点 P が頂点 A 上にあり,P は 1 秒毎に

- 今いる頂点に留まる
- 時計回りに隣接する頂点に移動する
- 反手計周りに隣接する頂点に移動する

のいずれかの動きを等確率で行う。5 秒後に点 P が頂点 A にいる確率を求めよ。

問題 C. $< x >$ を非負実数 x の小数部分を表すことにする。以下の広義積分を計算せよ。:

$$\int_0^{100} < \sqrt{x} > dx$$

問題 D. 黒板に 1 から 100 までの自然数が一個づつ書かれている。これらの数字を以下の $<$ 条件 $>$ を満たすように GroupA,GroupB の二つのグループに分類する方法は何通りあるか。

$<$ 条件 $>$:GroupA に属する数字の総積を A,GroupB に属する数字の総積を B とすると $gcd(A, B) = 1$

ただし、GroupA,GroupB の双方に 1 つ以上の数字が属さなければならない。

問題 E.

$$2{}_{2015}C_{1007} + {}_{2016}C_{1007}$$

の約数であるような最大の素数を求めよ。

問題 F. 半径 1 の単位円周上の 2 点 A,B をランダムに取り, この 2 点間の距離 |AB| を r とおく。

(1)$r \geq 1$ となる確率を求めよ。

(2)r の期待値 E(r) を求めよ。

(3)r の中央値を M(r) とおく。M(r) と E(r) の大小関係を求めよ。

問題 G.　以下の各問いに答えよ。

(1)　n を非負整数とするとき,3^n の最高位が 9 となる確率を求めよ。
なお,n は 0 以上のすべての整数を等確率でとるものとする。

(2)　n を 2019 以下の非負整数とするとき,3^n の最高位が 9 となる n は何通りあるか。
ただし,3^{2019} は 964 桁,3^{2018} は 963 桁である。

[以上]

2 解答

解答 A.
(1)$x, y > 0$ より,$xy \neq 0$ であり, 両辺を $1/xy$ 乗しても大小関係は変わらないので,

$$y^x \leq x^y \quad \Leftrightarrow \quad y^{1/y} \leq x^{1/x}$$

従って, 全ての正の実数 x に関して定義される実関数 $f(x) = x^{1/x}$ が最大値をとるような実数 x を求めればよい $\frac{df}{dx}$ を直接求めるのは困難であるので関数 $f(x)$ の両辺の自然対数をとると,

$$log(f(x)) = \frac{log(x)}{x}$$

この式の両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - log(x)}{x^2}$$

従って,

$$f'(x) = x^{1/x} * \frac{1 - log(x)}{x^2}$$

ここで, 任意の正の実数 x に対して $\frac{x^{1/x}}{x^2} > 0$ であるから,$f'(x) = 0$ となるとき,$1 - log(x) = 0$ である。よって,f' が 0 となる唯一の正の実数は $x = e$ である。
また,0<x<e のとき $1 > log(x)$,e<x のとき $1 < log(x)$ であるから, 0<x<e のとき,$1 - log(x) > 0$,e<x のとき $1 - log(x) < 0$ となる。以上から,

- 0<x<e のとき, $f'(x) = x^{1/x} * \frac{1-log(x)}{x^2} > 0$
- x=e のとき, $f'(x) = 0$
- e<x のとき, $f'(x) < 0$

といえる。これをもとに $f(x)$ の x に関する増減表を書くと以下のようになる。

x	0	...	e	...
$f'(x)$	なし	+	0	-
$f(x)$	なし	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$

以上より, f(x) は x=e において定義域内における最大値をとることが分かる。よって, 求める正の実数は e である。

< 補足 >:
なお,$f(x) = x^{1/x}$ のグラフは以下の図のようになる。

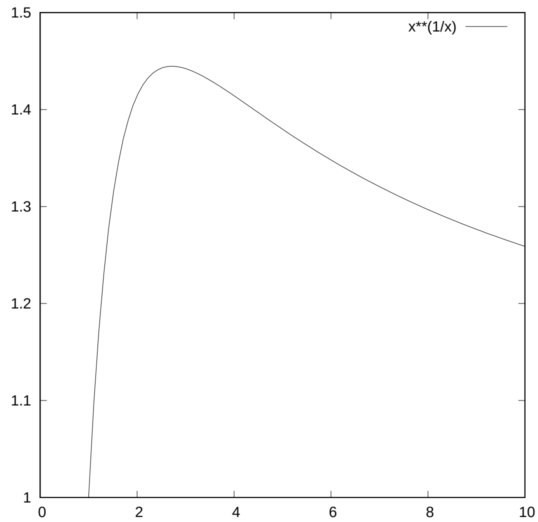

図 2A-1：$f(x) = x^{1/x}$ のグラフ

(2) (1) の増減表および $1 < 2 < e < 3 < 4$ であることより,n を正の整数としたときに $f(n) = n^{1/n}$ が最大値をとるような n の候補は $n = 2, 3$ である (このことは以下の表からも明らかである)。

x	0	...	2	...	e	...	3	...
$f'(x)$	なし	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	なし	↗	↗	↗	$e^{1/e}$	↘	↘	↘

ここで, 自明な不等式 $8 < 9$ を考える。この両辺は正より,$\frac{1}{6}$ 乗しても大小関係は変わらず, その結果 $2^{1/2} < 3^{1/3}$ を得る。従って, 求める答えは n=3 である。

解答 B.

各行を今 P がいる頂点 (上から A,B,C,D,E), 各列を 1 秒後に P がいる頂点 (左から A,B,C,D,E) とした, 以下のような 5×5 の行列 M を考える。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, 帰納的に M^n は n 秒後に点 P がいる頂点の推移を表す (いわゆるマルコフ連鎖である)。ここで, 点 P ははじめ頂点 A にいることが分かっているので,n 秒後に点 P が頂点 A にいる P の動き方のパターン総数は,M^n の (1,1) 成分の値に等しいことが分かる。一方 n 秒後の点 P の全ての動き方のパターン総数は 3^n であり, これらのパターンが全て問う確率で起きるので, 求める確率は (M^5 の (1,1) 成分)/3^5 である。

では,M^5 の計算に移ろう。まず $M*M=M^2$ を計算すると,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る。ここで, 1 行目さえ計算してしまえば, 5 頂点の位置関係の対称性から 2 行目以降は 1 行目の 5 つの数字の順番を変えただけのものになり容易に求められる。同様に,$M^2 * M^2 = M^4$ を計算すると,

$$M^4 = \begin{pmatrix} 19 & 17 & 14 & 14 & 17 \\ 17 & 19 & 17 & 14 & 14 \\ 14 & 17 & 19 & 17 & 14 \\ 14 & 14 & 17 & 19 & 17 \\ 17 & 14 & 14 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

を得る。最後に $M^5 = M^4 * M$ を計算すると,

$$M^5 = \begin{pmatrix} 53 & 50 & 45 & 45 & 50 \\ 50 & 53 & 50 & 45 & 45 \\ 45 & 50 & 53 & 50 & 45 \\ 45 & 45 & 50 & 53 & 50 \\ 50 & 45 & 45 & 50 & 53 \end{pmatrix}$$

となるので, 答えは,

$$\frac{53}{3^5} = \frac{53}{243}$$

である。

< 補足 >:
行列の M 乗は,C++ などのプログラミングで行列の積を定義すれば, 理論上 $O(log(n))$ の計算回数で求めることができる。なぜなら, 上記の解答で $M^4 = M^2 * M^2$ と計算したように,n が偶数の時, $M^n = M^{n/2} * M^{n/2}$ と計算でき, 指数部分を半分に減らせるからである。従って, 一般的な PC であれば (1 秒間に約 10^8 回の演算ができるので), 現実的な時間内で $n = 2^{10^8}$ 秒後といったかなり膨大な数値の場合も計算できる。

解答 C.
$[x]$ を実数 x の非負整数 x の部分とする。このとき,

$$< \sqrt{x} > = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$$

が成り立つ。従って,

$$\int_0^{100} < \sqrt{x} > dx = \int_0^{100} \sqrt{x} dx - \int_0^{100} [\sqrt{x}] dx \qquad ...(*)$$

式 (*) 右辺の計算を行うことで, 元の積分値を求める。まず,

$$\int_0^{100} \sqrt{x} dx = \left[\quad \frac{2}{3} x^{3/2} \quad \right]_0^{100} = \frac{2000}{3} \quad ...(i)$$

また,$g(x)=[\sqrt{x}]$ は $\sqrt{x}$ の整数部分であるから, 以下の図 2C-1 のように階段状に増加する関数になる。

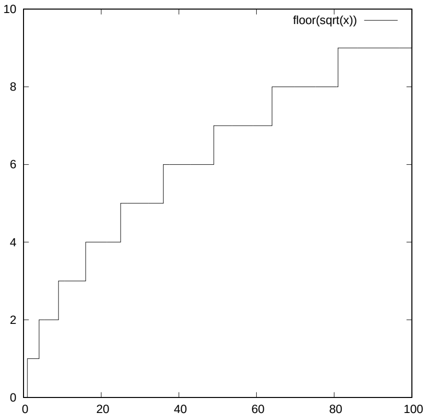

図 2C-1 :$g(x)=[\sqrt{x}]$ のグラフ

高さ ($=y$ 座標) が n(n は非負整数) の階段の横幅 ($=y$ が等しい x 座標の幅) は,$(n+1)^2-n^2=2n+1$ となるから階段の n 段目の面積は,$n*(2n+1)=2n^2+n$ である。x が [0,100] の値を動くとき,$g(x)$ はちょうど階段の 0 段目から 9 段目のすべてを含み,10 段目を含まない形になる。従って,

$$\int_0^{100}[\sqrt{x}]dx=\sum_0^9(2n^2+n)=\frac{9}{3}*(9+1)*(2*9+1)+\frac{9}{2}*(9+1)=615 \quad ...(ii)$$

$(i),(ii)$ を $(*)$ に代入して, 以下に示す答えを得る。:

$$\int_0^{100}<\sqrt{x}>dx=\frac{2000}{3}-615=\frac{155}{3}$$

$<$ 補足 $>$:

なお,$<\sqrt{x}>$ のグラフは以下の図 2C-2 のようになる。

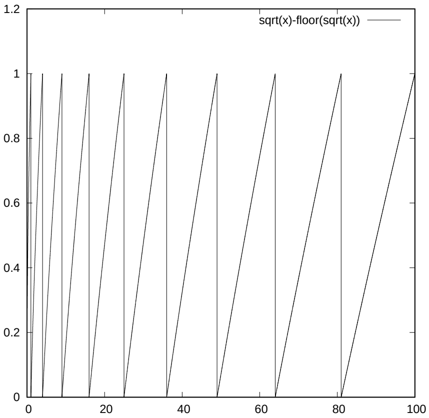

図 2C-2 :$h(x)=<\sqrt{x}>$ のグラフ

一見, のこぎり波のように直角三角形を繰り返しているように見えるので, 直接 $< \sqrt{x} >$ の積分を $100 * 1/2 = 50$ として計算できそうだが, 正しい答え $\frac{155}{3}$ とは $\frac{5}{3}$ だけ絶対誤差がある。実際は $\sqrt{x}$ の小数部分は一次関数のように直線状に増加するわけではなく, 非線形な増加の仕方をしているためこの誤差が生じる。

解答 D.
m の倍数が GroupA,GroupB の両方に含まれると $gcd(A, B) \geq m$ 故に $gcd(A, B) \neq 1$ となるから, 全ての自然数 m について m の倍数は全て同一グループに含まれなければならない。このことから,

- 2 の倍数は全て同一のグループに含まれる。
- 50 以下のすべての素数 p について,p,2p は同一のグループに含まれる。

の 2 点が成立し, これらより **「ある 50 以下の素数の倍数である数」** は全て同一グループに含まれるといえる。
逆に, 任意の 50 より大きい素数 (53,59,61,67,71,73,79,83,89,97) の倍数は 1 以上 100 以下の自然数の中にその数自身の一つしか存在しないため, これらの数字は GroupA,GroupB のいずれに属しても gcd(A,B) の値に影響しない。また,1 は GroupA,GroupB のいずれに属しても gcd(A,B) の値に影響しない。
結局,「1,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97」の 11 個の数字 (これらの数字の集合を S とする) は GroupA,GroupB のいずれに属してもよく, それ以外の 89 個の数字は全て A,B のいずれか一方に含まれなけらばならない。
S に含まれない 89 個の数字が GroupA,GroupB のどちらに属するかで 2 通りあり, どちらの場合も S に含まれる 11 個の数字の割り振り方は $2^{11} - 1$ 通りある (100 個すべての数字が同一のグループに属してはならないことに注意する) ので, 求めるパターン数は, $2 * (2^{11} - 1) = 4094$(通り) である。

解答 E:
以下,A が B の倍数であることを $B|A$ と書くことにする。$2{}_{2015}C_{1007} +_{2016} C_{1007}$ が 1009 以上の素数 p で割り切れると仮定すると p と 1008 は互いに素だから,

$$p|2{}_{2015}C_{1007} +_{2016} C_{1007} \Leftrightarrow p|2016{}_{2015}C_{1007} + 1008{}_{2016}C_{1007} \qquad ...(*)$$

である。ここで,$2016{}_{2015}C_{1007} = 1008{}_{2016}C_{1008}$ であるから,

$$(*) \Leftrightarrow p|1008{}_{2016}C_{1008} + 1008{}_{2016}C_{1007} \qquad ...(**)$$

更に, コンビネーションの性質:${}_mC_r ={}_{m-1} C_r +_{m-1} C_{r-1}$ より (この性質はパスカルの三角形を書いてみるとよく理解できる), $1008{}_{2016}C_{1008} + 1008{}_{2016}C_{1007} = 1008{}_{2017}C_{1008}$ であるから,

$$(**) \Leftrightarrow p|1008{}_{2017}C_{1008} \qquad ...(***)$$

${}_{2017}C_{1008} = \frac{2017!}{(1008!)*(1009!)}$ は整数であるが, この分母は素因数 2017 を含まず, かつ分子に素因数 2017 が含まれるので, これは 2017 の倍数である。従って,$2017|1008{}_{2017}C_{1008}$ である。
2017 は確かに 1009 以上の素数であるので,(*).(**),(***) の同値関係は成立し,

$$2017|2{}_{2015}C_{1007} +_{2016} C_{1007}$$

となる。また,$2016{}_{2015}C_{1007} + 1008{}_{2016}C_{1007} = 1008{}_{2017}C_{1008}$ 故,$2{}_{2015}C_{1007} +_{2016} C_{1007} =_{2017} C_{1008}$ であり,${}_{2017}C_{1008}$ は 2017 より大きい素因数を明らかに持たないので, 求める最大の素数は 2017 である。

< 補足 >：
昨年は西暦 2017 年, 平成 29 年であり, 西暦年と平成年が共にピタゴラス素数の年ということで話題になった。ピタゴラス素数とは 2 つの平方数の和で表せる素数のことであり, 例実際,$29 = 2^2 + 5^2$,$2017 = 9^2 + 44^2$ と表せる。なお, 次に西暦年が素数となるのは 2027 年である。

解答 F:
(1)2 点の距離は一方の点に対するもう一方の位置に依存するので, 片方の点 A の位置は以下の図 2F-1 に示すように固定してよい。従って,|AB| が 1 以上となるような他方の点 B の位置をのみ考える。ここで, 図 2F-1 に示すような半径 1 の円に内接する正六角形 PQRSTU を考える。

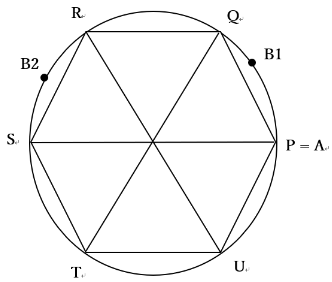

図 2F-1：単位円に内接する正六角形

この正六角形は図 2F-1 に示すように 6 つの合同な正三角形に分割されることから, 一辺の長さが 1 であると分かる。従って, 点 A を頂点 P に一致させたとき, 点 B が点 Q,U に一致するまたはそれら以上に点 A から離れていることが |AB| が 1 以上となる必要十分条件であると分かる。つまり、$\widehat{AB} \geq \pi/3$ であればよく, 円周全体の長さ 2π のうち $\widehat{UQ} = 4\pi/3$ の長さの領域に点 B があれば |AB| が 1 以上となるので求める確率は, $\frac{4\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3}$ である。

(2)　(1) と同様, 片方の点を固定して考えてもよいので, 点 A を固定し, 円の中心を O として A から反時計回りに見た点 B の回転角を θ, 三角形 ABO の内角 AOB を ϕ とおく (図 2F-2 参照)。

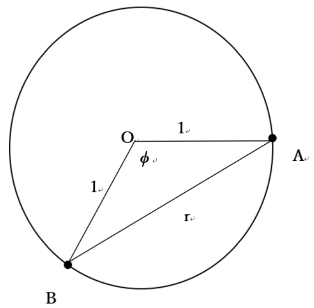

図 2F-2：3 点 A,B,O による二等辺三角形

この図から,

- $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\phi = \theta$
- $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のとき $\phi = 2\pi - \theta$

であると分かる。また, 三角形 ABO に対して余弦定理を適用すると,

$$r^2 = 2 - 2cos\phi$$

の関係式が得られ,$r \geq 0$ 故,

$$r = \sqrt{2}\sqrt{1 - cos\phi}$$

となる。r の期待値 E(r) は θ を 0 から 2π まで変化させたときの r の θ による積分値を変域幅 2π で割ったものである。更に,θ を 0 から 2π まで変化させたときの r の積分値は, 先に示した θ と ϕ の関係式から,ϕ を 0 から π まで変化させたときの ϕ による r の積分値を (0 から π までと π から 2π までの範囲での各積分値は等しいので)2 倍したものと一致することが分かる。従って,

$$E(r) = \frac{1}{2\pi} * 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1 - cos\phi}d\phi$$

ここで, 半角の定理より,$1 - cos\phi = 2sin^2\frac{\phi}{2}$ であるから,

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1 - cos\phi}d\phi = \sqrt{2}\int_0^{\pi}sin\frac{\phi}{2}d\phi = \sqrt{2}[-2cos\frac{\phi}{2}]_0^{\pi} = \sqrt{2} * (0 - (-2)) = 2\sqrt{2}$$

以上より,

$$E(r) = \frac{1}{2\pi} * 2\sqrt{2} * 2\sqrt{2} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

< 補足 >:

C++ 言語でランダムに単位上の 2 点を選択しその距離を求めるシミュレーションを行うプログラムを実装した。これを以下の図 2F-3 に示す。

```cpp
#include <iostream>
#include <ctime>
#include <cstdlib>
using namespace std;
#define rep(i, a) for (int i = 0; i < a; i++)

int main()
{
    srand (static_cast <unsigned> (time(0)));
    double p=0;
    int step=10000000;
    rep(i,step){
     double the1=(double) (rand())/((double)RAND_MAX/(4*acos(0)));
     double the2=(double) (rand())/((double)RAND_MAX/(4*acos(0)));
     p+=sqrt(pow(sin(the1)-sin(the2),2)+pow(cos(the1)-cos(the2),2));
    }
    cout<<"Ex:"<<p/step<<endl;
    cout<<"4/pi:"<<4/(2*acos(0))<<endl;
    return 0;
}
```

図 2F-3: 単位円周上の 2 点の距離期待値を計算するシミュレーションプログラム

このプログラムにより,1000 万回の試行を行い 2 点間の距離の平均値を Ex として算出した。Ex 及び $\frac{4}{\pi}$ を計算して比較できるよう出力した結果を以下の図 2F-4 に示す。

図 2F-4: 単位円周上の 2 点の距離期待値を計算するシミュレーション結果

この結果より, 確かに $E(r)$ は $\frac{4}{\pi}$ に近い値をとっていることが分かる。

(3) 単位円に内接する正方形を考えると,(1) と同様の方法で点 A を固定したとき $\frac{1}{2}$ の確率で $r>$(内接する正方形の一辺の長さ)$=\sqrt{2}$ となることが分かる。従って,$M(r)=\frac{1}{2}$ である。(2) から $E(r)=\frac{4}{\pi}$ であるので,$\sqrt{2}$ と $\frac{4}{\pi}$ の大小を比較すればよい。双方の値が正であることを考慮すると,

$$\sqrt{2} > \frac{4}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \pi$$

の同値関係が成り立つが, 実際,$2\sqrt{2} < \sqrt{9} = 3 < \pi$ である (3<π であることは有名だが,(1) の図 2F-1 における円周の長さが正六角形の周の長さより長いことから示される) ので $\sqrt{2} > \frac{4}{\pi}$ であるといえる。すなわち,$M(r) > E(r)$ である。

解答G:

(1)3^n が M 桁でかつその最高位が k であるとき,

$$k * 10^(M-1) \le 3^n < (k+1) * 10^(M-1)$$

の関係式が成り立つ。これらを常用対数にとると,

$$log_{10}k + M - 1 \le nlog_{10}3 < log_{10}(k+1) + M - 1$$

となる。従って桁数を M に固定したとき, 任意の M において, その最高位が k となる n の範囲は,

$$\frac{log_{10}k}{log_{10}3} \le n < \frac{log_{10}(k+1)}{log_{10}3} \qquad ...(*)$$

となる。ここで, 最高位が k である確率を P_k とおくと,$\sum_1^9 P_k = 1...(**)$ である。また,P_k の値の比は (*) に表される不等式の範囲の比と一致する (任意の M に対して 3^n の最高位が k である範囲は (*) の不等式で表される) ので定数 a を用いて,

$$P_k = \frac{a}{log_{10}3}(log_{10}(k+1) - log_{10}k)$$

と表される。

$$\sum_1^9 P_k = \frac{a}{log_{10}3}((log_{10}(2) - log_{10}(1)) + (log_{10}(3) - log_{10}(2)) + ... + (log_{10}(10) - log_{10}(9))) = \frac{a}{log_{10}3}$$

であるので,(**) より $a = log_{10}3$ である。
よって答えは $P_9 = log_{10}10 - log_{10}9 = 1 - 2log_{10}3 (\approx 0.0459)$ である。

< 補足 >：C++ 言語を用いてプログラムを組み, 手元で 3^0 から 3^{10000} までの最高位として現れる各数 1 から 9 の割合 p[1] から p[9] を計算した。その結果を以下に示す。

---

p[1]=0.30101
p[2]=0.17611
p[3]=0.12492
p[4]=0.09692
p[5]=0.07917
p[6]=0.06696
p[7]=0.05799
p[8]=0.05116
p[9]=0.04576

この実行結果から,$n \leq 10000$ のとき p[9] は確かに理論値約 0.0459 に近い値を取っていることが分かる。
なお, 一般に M 進表記法で最初の桁が n で始まる (n は 2 桁以上でもよい) 数の出現確率は

$$log_M(n+1) - log_M(n)$$

となることが示されており, これをベンフォードの法則という。この法則は不正データの検証などに用いられている。

(2)3^n と 3^{n+1} の最高位の数字の関係を考察すると以下の表のような関係が得られる。

3^n の最高位の数字	3^{n+1} の最高位としてありうる数字
1	3,4,5
2	6,7,8
3	9,1
4	1
5	1
6	1,2
7	2
8	2
9	2

この表をもとに, 最高位が k である状態をノード <k> とし, 各ノード <k> から最高位が k である数を 3 倍したときに取りうる値の割り振られたられたノードへの有向線分 (エッジ) を引き,3 倍したときに繰り上がりが生じる場合はエッジに +1 の重みをつけた状態遷移図を書くと以下の図 2G-1 のようになる。なお, 図中

の太い矢印は状態遷移図の開始点を指す ($3^0 = 1$ であるので, 開始点は 1 としている)。また,(<4>,<5>) と (<7>,<8>) はそれらが含まれる全ての有向線分の始点と終点が同じであるのでグラフにおいて等価なノードとみなし統合している。<4,5> ノードは最高位が 4 または 5 であることを意味し,<7,8> ノードは最高位が 7 または 8 であることを意味する。

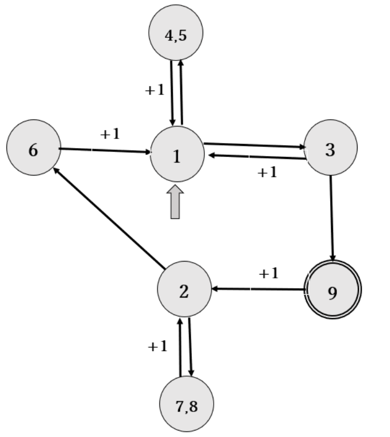

図 2G-1:3^n の最高位の状態遷移図

この図において 1 本の有向線分を通過して移動できるノードを隣接ノードという。隣接ノードへの移動は元の数を 3 倍することを意味する。
このグラフにおける,+1 の重みのあるエッジを 1 回通過するまでのありうるノード間の移動パターンを列挙すると以下のようになる。

<1>→<4,5>→<1>
<1>→<3>→<1>
<1>→<3>→<9>→<2>
<2>→<7,8>→<2>
<2>→<6>→<1>

問題文から 3^{2018} から 3^{2019} にかけて繰り上がりが生じていることがわかっているので,3^0 に 2019 回 3 を掛けたとき (= 有向線分を通過して 2019 回ノード間を移動したとき) に最終的に到達するノードは <1>,<2> のいずれかである。また,$3^0 = 1$ であり, かつ 3^{2019} は 964 桁なので, ノード <1> を開始点として +1 の重みのあるエッジをちょうど 963 回通過して <2> ノードに到達するように隣接ノードへの移動を 2019 回繰り返さなくてはならない。
ここで, ノード間の移動 <1>→<3>→<9>→<2> は 3 回の移動のうち 1 回で +1 の重みのあるエッジを通過し, それ以外のすべての移動パターン (<1>→<4,5>→<1>,<1>→<3>→<1>,<2>→<7,8>,<2>→<6>→<1>) は 2 回の移動のうち 1 回で +1 の重みのあるエッジを通過していることが分かる。またすべての移動パターンにおいて最後に移動するエッジが +1 の重みを有していることから, 3^{2019} は 3^{2018} から繰り上がりのあったので,2019 回の移動を終えた瞬間にいずれかの移動パターンをちょうど終えていることが分かる (移動パターンの途中で終了していない)。

よって,<1>→<3>→<9>→<2> の移動パターンが行われた回数を x とおくと, ノード間の移動回数に関する一次方程式

$$2(963-x)+3x=2019$$

を得る。これを解くと,$x=93$ となる。1 回の <1>→<3>→<9>→<2> の移動パターンでは必ず 1 回ノード <9> を通過し, それ以外の移動パターンでは <9> は一度も通過しないので,x の値は $n=0,1,2,...,2019$ における 3^n の最高位が 9 であるものの個数に等しいといえて, 求める答えは 93 通りである。

< 補足 >:
(2) の結果から,n が 0 以上 2019 以下の値をランダムにとるときの 3^n の最高位が 9 となる確率を求めると,$\frac{93}{2019}\approx 0.0461$ となり,(1) で求めた n が全ての非負整数をランダムに取る場合の理論値とほとんど一致していることが分かる。

3 参考文献

[1]LaTex コマンド集 (http://www.latex-cmd.com/),2018/05/11 閲覧
[2] 受験の月 (http://examist.jp/),2018/05/12 閲覧
[3] 大滝みや子, 岡嶋祐史, 平成 30 年度応用情報技術者合格教本, 技術評論社,56-66,2017