Examen Parcial 2 de Álgebra
(Solución)

Ejercicio 1. Resuelve los sistemas

$$\begin{cases} \phantom{2u+{}} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} w + x + 2y + z = 1 \\ w - x - y + z = 0 \\ \phantom{w+{}} x + y \phantom{{}+z} = -1 \\ w + x \phantom{{}+2y} + z = 2 \end{cases}$$

Solución. Para el **primer sistema**: Observamos que la cuarta ecuación se obtiene restando de la primera ecuación las ecuaciones segunda y tercera:

$$\begin{array}{r r} \text{ec}(1): & v + 3w - 2x = 0 \\ -\text{ec}(2): & -2u - v + 4w - 3x = 0 \\ -\text{ec}(3): & -2u - 3v - 2w + x = 0 \\ \hline \text{ec}(4): & -4w - 3v + 5w - 4x = 0 \end{array}$$

Y también observamos que la tercera ecuación es igual a dos veces la primera ecuación más la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r r} 2 \times \text{ec}(1): & 2v + 6w - 4x = 0 \\ \text{ec}(2): & 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ \hline \text{ec}(3): & 2u + 3v + 2w - x = 0 \end{array}$$

Por lo que las ecuaciones tercera y cuarta no aportan información al sistema (*información basura*), y podemos prescindir de ellas. El sistema original se reduce al sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente

$$\begin{cases} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \end{cases}$$

Despejamos v de la primera de estas ecuaciones,

$$v = -3w + 2x.$$

Sustituimos en la segunda para obtener

$$\begin{aligned} 2u - 3w + 2x - 4w + 3x &= 0 \\ 2u - 7w + 5x &= 0 \\ u &= \frac{7}{2}w - \frac{4}{2}x \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema son

$$\left(\frac{7}{2}w - \frac{4}{2}x, -3w + 2x, w, x\right), \qquad w, x \in \mathbb{R}.$$

Para el **segundo sistema**: Si sumamos las ecuaciones segunda y tercera, obtenemos

$$w + z = -1.$$

Y si sumamos las ecuaciones primera y cuarta obtenemos

$$\begin{aligned} 2(w+z) + 2(x+y) &= 3 \\ 2(w+z) - 2 &= 3 \quad \text{(por la tercera ecuación: } x + y = -1) \\ w + z &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Una inconsistencia. En consecuencia el sistema no tiene solución.

Observación: Desde luego estas no son las únicas formas de resolver este ejercicio. □

Ejercicio 2. Encuentra para qué valores de $k \in \mathbb{Z}$, si existen, el sistema tiene (a) solución única, (b) una infinidad de soluciones, (c) no tiene solución.

$$\begin{aligned} x + \ y + kz &= \ \ 1 \\ x + ky + \ z &= \ \ 1 \\ kx + \ y + \ z &= -2 \end{aligned}$$

Solución. La matriz de coeficientes del sistema es

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene solución única si y sólo si $|A| \neq 0$.

Ahora vamos a calcular $|A|$. Tenemos

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} \\ &= (k-1) - (1-k) + k(1-k^2) \\ &= (k-1)(2 - k(k+1)) \\ &= (k-1)(2-k-k^2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |A| = 0 &\Leftrightarrow (k-1)(2-k-k^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ k - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad 2 - k - k^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ k = 1 \quad \text{ó} \quad k^2 + k + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \ k = 1 \quad \text{ó} \quad \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \ k = 1 \quad \text{ó} \quad k + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \ k = 1 \quad \text{ó} \quad k = \pm\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \ k = 1 \quad \text{ó} \quad (k = 1 \text{ y } k = -2) \\ &\Leftrightarrow \ k = 1 \quad \text{ó} \quad k = -2. \end{aligned}$$

Por lo que el sistema tiene solución única si $k \neq 1, -2$. (**Observación**: No es necesario encontrar explícitamente las soluciones, ya que esto no es parte del problema).

Por otro lado, si $k = 1$, entonces las ecuaciones primera y segunda entran en contradicción con la tercera, por lo que el sistema es inconsistente (no tiene solución).

Resta analizar el caso $k = -2$. El sistema en este caso es

$$\begin{aligned} x + \ \ y - 2z &= \ \ 1 \\ x - 2y + \ \ z &= \ \ 1 \\ -2x + \ \ y + \ \ z &= -2 \end{aligned}$$

De las ecuaciones primera y segunda obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= x - 2y + z \\ 3y &= 3z \\ y &= z. \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = z$ en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x + z - 2z &= 1 \\ x - z &= 1 \\ x &= 1 + z. \end{aligned}$$

Por lo que si $k = -2$, el sistema tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$(1 + z, z, z), \qquad z \in \mathbb{R}.$$

$\square$