

Examen Parcial 3 de Álgebra
(Solución)

Ejercicio 1. Expresa la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución. Vamos a calcular la matriz inversa de A con el método de Gauss-Jordan. En cada paso definiremos la matriz elemental de acuerdo a la operación realizada en la reducción.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) & E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) & E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array} \right) & E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicio 2. Una matriz cuadrada A es *ortogonal* si $A^T = A^{-1}$. Prueba que si A es una matriz ortogonal, entonces $|A| = 1$ ó $|A| = -1$.

Solución. Tenemos,

$ A ^2 = A A $	definición del cuadrado de un número
$= A A^T $	propiedad del determinante: $ A = A^T $
$= A A^{-1} $	por hipótesis: $A^{-1} = A^T$
$= AA^{-1} $	el determinante de un producto es el producto de los determinantes
$= I $	definición de matriz inversa
$= 1$	el determinante de la identidad es 1.

De donde $|A| = \pm\sqrt{1}$. Esto es, $|A| = 1$ ó $|A| = -1$.

□

Ejercicio 3. Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matriz siguiente es invertible.

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$$

Solución. Observamos que el tercer renglón es la suma del primero y dos veces el segundo. Por lo tanto $|A| = 0$. Luego la matriz A no es invertible (no importa el valor de α). □