Deall y Deilliad

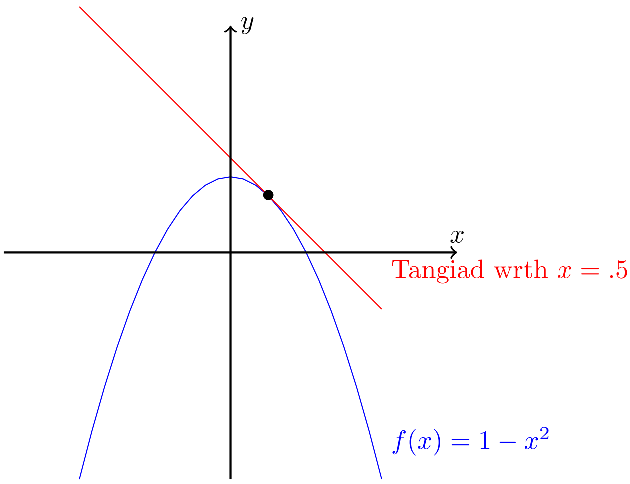
Vincent Knight

1984/02/14

1 Cyflwyniad

Mae differu yn gysyniad yn Fathemateg a astudiwyd yng Nghalcwlws. Mae yna drafodaeth barhaus i weld pwy oedd y cyntaf i ddiffinio differu: Leibniz neu Newton [1].

Mae differu yn galluogi cyfrifiad graddiant tangiad cromlin ar unrhyw bwynt, fel a gweler yn Ffigwr 1.



Ffigwr 1: Y plot $f(x) = 1 - x^2$ gyda thangiad wrth $x = .5$.

Mae differu nawr yn dechneg sy'n cael ei ddysgu i fyfyrwyr mathemateg trwy gydol y byd. Yn y ddogfen hon byddaf yn trafod rhai agweddau differu.

2 Archwilio'r deilliad yn defnyddio Sage

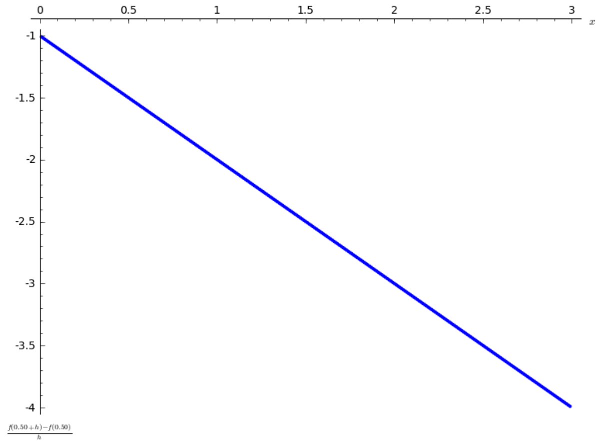
Diffiniad y terfan $f(x)$ yn $x = a$ wedi dynodi gan $f'(a)$ yw:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Fe allwch ddefnyddio'r cod canlynol yn sage i roi'r terfan uchod:

```
def illustrate(f, a):
    """
    Ffwythiant sy'n cymryd ffwythiant ac yn dangos diffiniad terfannol y deilliad ar bwynt a rhoddir
    """
    lst = []
    for h in srange(.01, 3, .01):
```

```
    lst.append([h,(f(a+h)-f(a))/h])
  return list_plot(lst, axes_labels=['$x$','$\\frac{f(%.02f+h)-f(%.02f)}{h}$' % (a,a)])
```



Ffigwr 2: Y deilliad $f(x) = 1 - x^2$ yn $x = .5$ yn cydgyfeirio i -1 wrth i $h \to 0$.

Os ydym ni eisiau plotio'r tangiad ym mhwynt α o'r ffwythiant, fe allwn ni defnyddio'r canlynol:

$$\begin{aligned} y =& ax + b && \text{(diffiniad llinell syth)} \\ & f'(a)x + b && \text{(diffiniad y deilliad)} \\ & f'(a)x + f(a) - f'(a)a && \text{(rydym yn gwybod fod y llinell yn croestorri } f \text{ yn } (a, f(a))\text{)} \end{aligned}$$

Fe allwn gyfuno'r dull hwn gyda darn o god blaenorol i weld sut mae'r llinell tangiad yn cydgyfeirio wrth i diffiniad terfannol y deilliad cydgyfeirio:

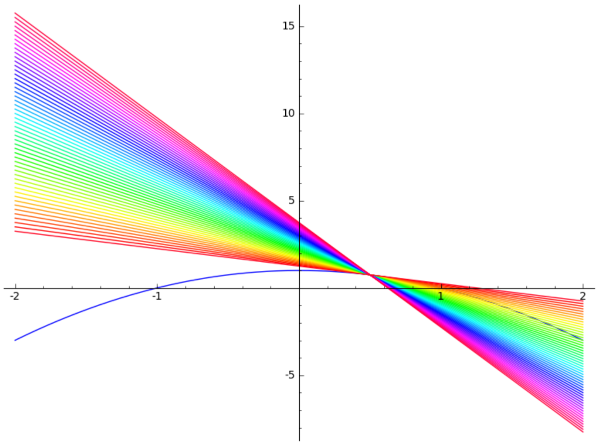
```
def convergetangentialline(f, a, x1, x2, nbrofplots=50, epsilon=.1):
    """
    Ffwythiant sy'n gwneud i linell tangiad cydgyfeirio
    """
    clrs = rainbow(nbrofplots)
    k = 0
    h = epsilon
    p = plot(f, x, x1, x2)
    while k < nbrofplots:
        tangent(x) = fdash(f, a, h) * x + f(a) - fdash(f, a, h) * a
        p += plot(tangent(x), x, x1, x2, color=clrs[k])
        h += epsilon
        k += 1
    return p
```

Mae'r plot a ddangosir yn Ffigwr 3 yn dangos sut mae'r llinellau yn cydgyfeirio i'r tangiad go iawn $1 - x^2$ wrth i $x = 2$ (y llinell goch yw'r gromlin agosaf).

Nodwch fod y plot olaf yn defnyddio diffiniad **go iawn** y deilliad ac nid y brasamcan.

3 Casgliadau

Yn yr adroddiad hwn rydw i wedi archwilio diffiniad y terfan, ac yn delweddu deilliad ffwythiant wrth i $h \to 0$. Mae'r cod a ddefnyddiwyd `https://sage.maths.cf.ac.uk/home/pub/18/` yn defnyddio gallu differu Sage yn ogystal a'i gallu plotio.

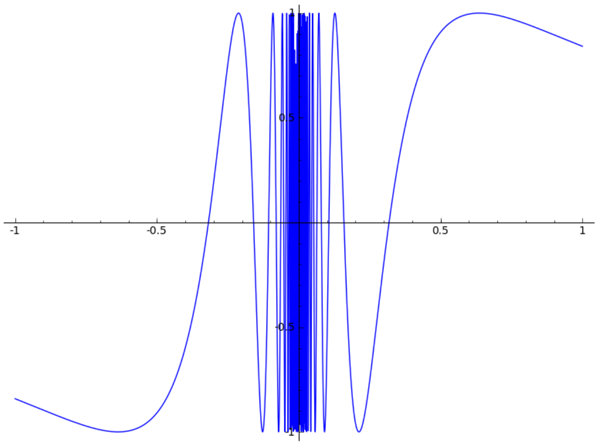


Ffigwr 3: Llinellau yn cydgyfeirio i'r tangiad wrth i $h \to 0$.

Mae yna agweddau amrywiol eraill gallaf wedi archwilio fel rheolau differu symbolaidd. Er enghraifft:

$$\frac{dx^n}{dx} = (n+1)x^n \text{ os yw } x \neq -1$$

Yn ogystal â hwn mae'n ddiddorol i nodi bodolaeth ffwythiannau sydd **ddim** yn ddifferadwy ym mhwynt, er enghraifft y ffwythiant $f(x) = \sin(1/x)$ sydd ddim yn ddifferadwy yn $x = 0$. Dangosir plot o'r ffwythiant hwn yn Ffigwr 4.



Ffigwr 4: Ffwythiant annifferadwy yn $x = 0$.

Cyfeirnodau

[1] Jason Socrates Bardi. "The Calculus Wars: Newton". In: *Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time (Thunder Mouth, New York, 2006)* (2006).